MARIO FRANZ WEITZER

ABZÄHLPROBLEME BEI MATCHINGS

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Magisters
an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Karl-Franzens-Universität Graz

O.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.phil. Peter Kirschenhofer
Lehrstuhl für Mathematik und Statistik
Montanuniversität Leoben

2011

. . . an Romana!

Vorwort

Soweit es neben meinem Studium möglich war, habe ich mich in den vergangenen Jahren vor allem mit dem Collatz-Problem und dem Kartenspiel Texas Hold'em Poker auseinandergesetzt. Von der ursprünglichen Idee, mit letzterem Geld zu verdienen, ist schlussendlich – wie so oft – die Neugier auf mathematische und insbesondere graphentheoretische Wahrheiten übrig geblieben, sowie der Drang nach Perfektion, welcher etwa durch die Möglichkeit, mit Zuversicht behaupten zu können, dass die Wahrscheinlichkeit mit zwei Assen gegen 5 Gegner zu gewinnen exakt $\frac{3127522935011410062}{6387482947310665200}$ beträgt, durchaus befriedigt wird.

So wie das stundenlange Nachdenken und Ausprobieren hat mir auch das Schreiben dieser Arbeit sehr großen Spaß gemacht. Aber nichts davon wäre möglich gewesen, ohne die Unterstützung anderer. An dieser Stelle möchte ich mich bei Professor Peter Kirschenhofer bedanken, der mir durch seine engagierte und gewissenhafte Betreuung eine große Hilfe beim Verfassen dieser Arbeit war. Ein besonderer Dank gilt meiner Familie und vor allem meinen Eltern, Karin und Erich, für beinahe drei Jahrzehnte bedingungsloser, grenzenloser und liebevollster Unterstützung!

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **3**

2. Konventionen **5**

3. Definitionen **7**
3.1. Grundlagen 7
3.2. Färbungen 16
3.3. Matchings und unabhängige Mengen 18
3.4. Permanente und verallgemeinerte Permanente 23
3.5. Weitere Definitionen 23

4. Matchings **25**
4.1. Allgemeine Sätze über Matchings 25
4.1.1. Der Satz von König 25
4.1.2. Der Satz von Hall 26
4.1.3. Der Satz von Tutte 27
4.2. Matchingpolynome 29
4.2.1. Matching- und Defektpolynom 29
4.2.2. Disjunkte Vereinigung von Graphen 30
4.2.3. Entfernung von Knoten und Kanten 31
4.2.4. Matchingpolynom eines Waldes 31
4.2.5. Matchingpolynom eines Pfades 32
4.2.6. Matchingpolynom eines Kreises 33
4.2.7. Matchingpolynom eines vollständigen Graphen 33
4.2.8. Matchingpolynom eines vollständig bipartiten Graphen 33
4.2.9. Rechenregeln für Unabhängigkeitspolynome 34
4.2.10. Weitere Erkenntnisse über Matchingpolynome 34

5. Matchings und Poker **37**
5.1. Texas Hold'em Poker 37
5.2. Wahrscheinlichkeiten 39
5.3. Spielsituationen 39
5.4. Zusammenhang mit Matchings 41

6. Algorithmen **45**
6.1. Ein Algorithmus 45
6.1.1. Theoretische Einordnung 46
6.1.2. Vorbereitung der Graphen 48
6.1.3. Auffinden innerer Ähnlichkeiten 53

6.1.4. Berechnung der verallgemeinerten Permanenten 56
6.1.5. Anwendung bei Texas Hold'em Poker 57
6.1.6. Mögliche Verbesserungen und offene Fragen 60
6.2. Matching- und Unabhängigkeitspolynome – Der Kantengraph 61

A. River und Preflops **64**

Literaturverzeichnis **79**

1. Einleitung

Eine Menge von Kanten eines Graphen heißt Matching, wenn keine zwei dieser Kanten einen Knoten gemeinsam haben. Matchings bilden einen zentralen Gegenstand der Graphentheorie und die Frage nach deren Anzahl in einem gegebenen Graphen ist eine graphentheoretisch naheliegende und natürliche. Gleichzeitig bilden Matchings eine Abstraktion einer Vielzahl unterschiedlicher Dinge und das Zählen eben dieser findet daher in zahlreichen Bereichen auch direkte praktische Anwendung. Ein Beispiel dafür wäre die Analyse der Stabilität von Molekülen, welche in einem Zusammenhang zur Anzahl perfekter Matchings im so genannten Hückel-Graphen steht, der das Molekül in gewisser Weise repräsentiert (siehe dazu: *Lovász and Plummer [1986, S. 349ff]*). Ein weiteres wäre das exakte Berechnen diverser Wahrscheinlichkeiten beim Kartenspiel Texas Hold'em Poker.

Im ersten Teil dieser Arbeit (Kapitel 4) werden einige der wichtigsten Erkenntnisse über Matchings und deren Anzahl zusammengefasst. Dabei liegt das Interesse vor allem auf Matchings einer gegebenen Kardinalität (k-Matchings) und insbesondere auf maximalen und perfekten Matchings. Letztere sind jene, welche die Knotenmenge des Graphen vollständig ausschöpfen, also für jeden Knoten des Graphen eine Kante enthalten, die mit diesem Knoten verbunden ist. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei das Matchingpolynom, dessen k-ter Koeffizient gerade die Anzahl dieser k-Matchings ist. Mit diesem lässt sich unter anderem sehr einfach beschreiben, wie es sich auswirkt, wenn ein Graph mehrere Zusammenhangskomponenten besitzt, oder man einen einzelnen Knoten oder eine einzelne Kante aus dem Graphen entfernt, weshalb es sich durch Rekursion für viele spezielle Graphen direkt angeben lässt. Ein weiteres Hilfsmittel ist die Adjazenzmatrix des Graphen – eine binäre Matrix, deren Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte genau dann 1 ist, wenn der i-te und j-te Knoten des Graphen verbunden sind. Für Wälder – welche eine besonders wichtige Klasse von Graphen darstellen – steht das charakteristische Polynom in einem sehr einfachen und direkten Zusammenhang zum Matchingpolynom.

Im zweiten Teil (Kapitel 5 und 6) werden zwei Algorithmen zur Berechnung der Anzahl von Matchings fester Kardinalität in beliebigen Graphen beschrieben. Insbesondere wird dabei auch ein neuer Algorithmus vorgestellt, mit dem es gelungen ist, das oben genannte Problem der Bestimmung gewisser Wahrscheinlichkeiten bei Texas Hold'em Poker zufriedenstellend zu lösen. Er ermöglicht das direkte Berechnen der Anzahl von k-Matchings für ein beliebiges k. Für zwei bis sechs Spieler liegen nun die Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen, zu verlieren, oder gegen eine beliebige Anzahl an Gegnern unentschieden zu spielen in allen erdenklichen Spielsituationen vor (siehe beiliegende DVD). Außerdem wurde eine obere Schranke für die Anzahl der wesentlich verschiedenen „River“ (Endspiele) – also jene, bei denen sich die genannten Wahrscheinlichkeiten zumindest in einem Wert unterscheiden – bei einer beliebigen Spieleranzahl ermittelt, nämlich 151215. Für zwei bis sechs Spieler wird darüber hinaus die exakte Anzahl dieser wesentlich verschiedenen River angegeben. Da diese etwa für vier Spieler 132368 beträgt, liegt die zuvor

genannte obere Schranke sehr nahe am tatsächlichen Maximum. Der genaue Zusammenhang zwischen den genannten Wahrscheinlichkeiten und der Anzahl von Matchings wird aufgezeigt und es werden beispielhaft Ergebnisse präsentiert. Aus der Funktionsweise des Algorithmus folgt überdies eine Verallgemeinerung eines bekannten Zusammenhangs zwischen der Anzahl perfekter Matchings gewisser bipartiter Graphen und der Permanente der Biadjazenzmatrix auf allgemeine Graphen und Matchings einer beliebigen Kardinalität (k-Matchings).

Der zweite, ebenfalls in Kapitel 6 vorgestellte Algorithmus stammt aus *Cash [2007]* und erlaubt es, das Unabhängigkeitspolynom eines beliebigen Graphen als Ganzes zu berechnen. Das Unabhängigkeitspolynom stellt eine Verallgemeinerung des Matchingpolynoms dar, weshalb auch dieses über den Umweg des so genannten Kantengraphen bestimmt werden kann. Beim Berechnen der genannten Wahrscheinlichkeiten erweist sich der Algorithmus jedoch als praktisch nicht anwendbar. Zum einen berechnet er immer das gesamte Matchingpolynom – von diesem also alle Koeffizienten. Im Fall der Wahrscheinlichkeiten werden allerdings bloß gewisse dieser Koeffizienten benötigt, welche mit dem zuvor beschriebenen Algorithmus einzeln berechnet werden können. Zum anderen muss jeder Graph einzeln ausgewertet werden, wohingegen der andere Algorithmus Vorteile aus „inneren Ähnlichkeiten“ zweier oder mehrerer Graphen zieht.

2. Konventionen

- Die **leere Menge** wird mit dem Symbol $\emptyset$ bezeichnet.
- Die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der echt positiven, ganzen Zahlen. Die Menge der nicht-negativen, ganzen Zahlen wird als $\mathbb{N}_0$ bezeichnet.
- Das **Infimum** der **leeren Menge** sei als ∞ und das **Supremum** als $-\infty$ definiert.
- Die Abkürzung „**p.v.**“ hinter einem Tupel oder einer Menge von Tupeln bedeutet, dass die Einträge des oder der Tupel paarweise verschieden sein sollen.

  „**p.v.**“ hinter einer Menge, die über eine Auflistung ihrer Elemente gegeben ist (also etwa $\{a, b\}$ oder $\{a_1, \ldots, a_n\}$) bedeutet, dass die aufgelisteten Elemente paarweise verschieden sind.
- Die Symbole $\nearrow$ und $\searrow$ hinter einem Tupel oder einer Menge von Tupeln bedeuten, dass die Einträge des oder der Tupel **monoton steigend**, beziehungsweise **monoton fallend** sein sollen und die Symbole $\uparrow$ und $\downarrow$ jeweils **streng monoton steigend** und **streng monoton fallend**.
- Für Mengen A, B und natürliche Zahlen n, m bezeichnen

  $\boldsymbol{A^n}$ das n-fache kartesische Produkt von A

  $\boldsymbol{A^n \times B^m}$ die Menge aller $(n+m)$-Tupel deren ersten n Einträge aus A und letzten m Einträge aus B stammen

  $\boldsymbol{A^{n \times m}}$ die Menge aller $n \times m$-Matrizen mit Einträgen aus A
- **Teilmengen** und **echte Teilmengen** werden durch die beiden Symbole $\subseteq$ und $\subset$ gekennzeichnet.
- Die **Disjunkte** Vereinigung (Vereinigung zweier Mengen mit leerem Durchschnitt) wird mit dem Symbol $\dot\cup$ dargestellt.
- Wie üblich hat eine **leere Summe** den definierten Wert 0 und ein **leeres Produkt** den Wert 1.
- **Eindeutige Existenz** wird mit $\exists^1$ dargestellt.
- Das Symbol i bezeichnet die **imaginäre Einheit**.
- Das Symbol e bezeichnet die **eulersche Zahl**.
- Eine **binäre Matrix** ist ein Matrix mit Einträgen aus $\{0, 1\}$.

- Die Begriffe **Tupel** und **endliche Folge** werden synonym verwendet und auf eine der folgenden Arten notiert: $(a_1, \ldots, a_n)$ oder $a_1 \cdots a_n$.
- Tritt ein Tupel als Operand in einer **Mengenoperation** $(\cup, \cap, \setminus, \times, \ldots)$ oder als Argument einer Abbildung anstelle einer Menge auf, so wird es als Menge der im Tupel enthaltenen Elemente aufgefasst. Das Symbol $\in$ drückt neben der **Elementbeziehung** zwischen Mengen auch die Zugehörigkeit zu einem Tupel aus.
- Für eine natürliche Zahl n bezeichnet $\boldsymbol{E_n}$ die **Einheitsmatrix** mit n Zeilen und Spalten. Ergibt sich der Index n aus dem Zusammenhang, so wird er nicht angegeben.
- $\lfloor \cdot \rfloor$ bezeichnet die **Gaußklammer**. Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ also die größte ganze Zahl, welche kleiner oder gleich x ist.
- Für eine natürliche Zahl n bezeichnet $\boldsymbol{S_n}$ die **symmetrische Gruppe** der Ordnung n, also die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ zusammen mit der Komposition von Abbildungen.

3. Definitionen

3.1. Grundlagen

Bis auf wenige Ausnahmen gehören die im Folgenden definierten Begriffe zum grundlegenden Vokabular der Graphentheorie und sind daher in beinahe jedem Buch mit graphentheoretischen Inhalten auf die folgende oder eine sinnverwandte Weise definiert. Stellvertretend für viele mögliche Quellen sei hier auf das Buch *Rosen [1999]* verwiesen, in welchem neben diesen eine Vielzahl weiterer gebräuchlicher Begriffe definiert werden. Stammt ein Begriff aus einer anderen Quelle oder wird in dieser Arbeit erstmals eingeführt, so wird gesondert darauf hingewiesen.

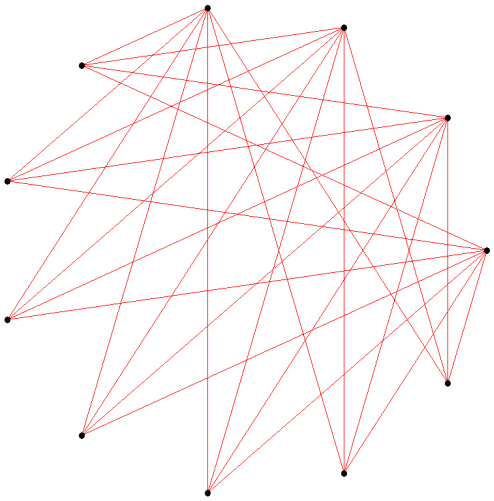


Abbildung 3.1.: Beispiel eines Graphen

Es gibt unterschiedlich allgemeine Varianten, den Begriff *Graph* zu definieren. Für die Zwecke dieser Arbeit ist die folgende ausreichend:

Definition 1
Ein ***Graph*** *G ist ein 2-Tupel (G_v, G_e) (in Anlehnung an die englischen Begriffe* Vertices *für Knoten und* Edges *für Kanten) bestehend aus einer endlichen Menge G_v – genannt die* ***Knotenmenge*** *(von G) – und einer Menge G_e – genannt die* ***Kantenmenge*** *(von G) – , wobei G_e eine Teilmenge der Menge aller 2-elementigen Teilmengen von G_v ist (und damit ebenfalls endlich). Oder in prädikatenlogischer Formulierung:*

$$G = (G_v, G_e)\ \textbf{Graph} \iff G_e \subseteq \{M \subseteq G_v | \#M = 2\}$$

Sinngemäß nennt man die Elemente der Knotenmenge von G die ***Knoten*** *(von G) und die Elemente der Kantenmenge von G die* ***Kanten*** *(von G).*

Eine 2-elementige Menge der Form $\{v_1, v_2\}$ (also etwa eine Kante eines Graphen) wird kurz als v_1v_2 geschrieben. Gemäß der Konvention zur Schreibweise von geordneten Paaren, könnte damit auch ein solches bezeichnet werden. Welcher Fall gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext.

Ein Graph G heißt ***nicht-leer****, falls die Knotenmenge von G nicht-leer ist.*

In einem allgemeineren Kontext würde man die soeben definierten Graphen als endliche und einfache bezeichnen, das heißt als endliche, ungerichtete Graphen ohne Schlingen oder Mehrfachkanten.

Definition 2
Ein Graph G heißt ***Teilgraph*** *eines Graphen H (in Zeichen: $\boldsymbol{G \subseteq H}$), falls sowohl die Knoten-, als auch die Kantenmenge von G in der Knoten-, beziehungsweise Kantenmenge von H enthalten ist, also:*

$$G \textbf{ Teilgraph } \text{von } H \iff \begin{aligned} G_v &\subseteq H_v \\ G_e &\subseteq H_e \end{aligned}$$

Ein Teilgraph G eines Graphen H heißt ***echter Teilgraph*** *von H (in Zeichen: $\boldsymbol{G \subset H}$), falls G und H verschieden sind.*

Zwei Graphen G und H heißen ***disjunkt****, falls sowohl die Knoten- als auch die Kantenmengen von G und H disjunkt sind, also:*

$$G, H \textbf{ disjunkt} \iff \begin{aligned} &G_v, H_v \text{ disjunkt} \\ &G_e, H_e \text{ disjunkt} \end{aligned}$$

Für zwei Graphen G und H bezeichnet $\boldsymbol{G \cup H}$ die ***Vereinigung*** *von G und H und ist definiert als jener Graph, dessen Knoten- und Kantenmengen die Vereinigungen der Knoten- und Kantenmengen von G und H sind, also:*

$$\boldsymbol{G \cup H} := (G_v \cup H_v, G_e \cup H_e)$$

Für zwei Graphen G und H bezeichnet $\boldsymbol{G \cap H}$ den ***Durchschnitt*** *von G und H und ist definiert als jener Graph, dessen Knoten- und Kantenmengen die Durchschnitte der Knoten- und Kantenmengen von G und H sind, also:*

$$\boldsymbol{G \cap H} := (G_v \cap H_v, G_e \cap H_e)$$

Definition 3
Zwei Knoten v_1 und v_2 eines Graphen G heißen ***adjazent*** *(in G), falls es eine Kante von G gibt, welche v_1 und v_2 verbindet, also:*

$$v_1, v_2 \textbf{ adjazent } \text{(in } G) \iff \{v_1, v_2\} \in G_e$$

Zwei Kanten e_1 und e_2 eines Graphen G heißen ***adjazent*** *(in G), falls sie genau einen Knoten gemeinsam haben, also:*

$$e_1, e_2 \textbf{ adjazent } (\text{in } G) \iff \#(e_1 \cap e_2) = 1$$

Ein Knoten v und eine Kante e eines Graphen G heißen ***inzident*** *(in G), falls v in e enthalten ist, also:*

$$v, e \textbf{ inzident } (\text{in } G) \iff v \in e$$

Definition 4
Eine bijektive Abbildung ϕ zwischen den Knotenmengen zweier Graphen G_1 und G_2 heißt ***(Graphen-)Isomorphismus*** *(von G_1 nach G_2), falls sie die Kanten von G_1 genau auf die Kanten von G_2 abbildet, also:*

$$\phi \textbf{ (Graphen-)Isomorphismus } (\text{von } G_1 \text{ nach } G_2) \iff$$
$$\iff \forall (v_1, v_2) \in {G_1}_v{}^2 : (v_1, v_2 \text{ adjazent in } G_1 \iff \phi(v_1), \phi(v_2) \text{ adjazent in } G_2)$$

Zwei Graphen G_1 und G_2 heißen ***isomorph*** *(in Zeichen: $G_1 \simeq G_2$), wenn es einen Isomorphismus zwischen G_1 und G_2 gibt, also:*

$$G_1, G_2 \textbf{ isomorph} \iff \exists \phi : \phi \text{ Isomorphismus von } G_1 \text{ nach } G_2$$

Isomorphismen sind also genau jene Abbildungen, welche die Knoten eines Graphen eineindeutig „umbenennen“ und damit die innere Struktur des Graphen nicht ändern. Im Fall des in dieser Arbeit verwendeten Graphen-Begriffs, welcher sich auf endliche Graphen beschränkt, kann für einen beliebigen Graphen G also stets ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit angenommen werden, dass die Knotenmenge folgende spezielle Teilmenge der natürlichen Zahlen bildet: $G_v = \{1, \ldots, \#G_v\}$

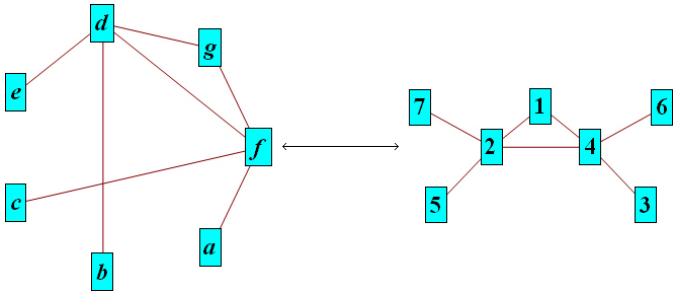


Abbildung 3.2.: Zwei isomorphe Graphen

Definition 5
Das ***Komplement G^c*** *eines Graphen G bezeichnet jenen Graphen, der dieselbe Knotenmenge hat und dessen Knoten genau dann adjazent sind, wenn sie es in G nicht sind, also:*

$$\boldsymbol{G^c} := (G_v, \{\{v_1, v_2\} \subseteq G_v | v_1 \neq v_2 \wedge v_1, v_2 \text{ nicht adjazent in } G\})$$

Definition 6
Für einen Knoten v eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{G - v}$ *jenen Graphen, der aus G entsteht, wenn man v und alle mit v inzidenten Kanten aus G entfernt, also:*

$$\boldsymbol{G - v} := (G_v \setminus \{v\}, \{e \in G_e | v, e \text{ nicht inzident}\})$$

Für eine Menge von Knoten V eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{G - V}$ *jenen Graphen, der aus G entsteht, wenn man alle Knoten in V und alle mit einem Knoten in V inzidenten Kanten aus G entfernt, also:*

$$\boldsymbol{G - V} := (G_v \setminus V, \{e \in G_e | \forall v \in V : v, e \text{ nicht inzident}\})$$

Für eine Kante e eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{G - e}$ *jenen Graphen, der aus G entsteht, wenn man e aus G entfernt, also:*

$$\boldsymbol{G - e} := (G_v, G_e \setminus \{e\})$$

Für eine Menge von Kanten E eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{G - E}$ *jenen Graphen, der aus G entsteht, wenn man alle Kanten in E aus G entfernt, also:*

$$\boldsymbol{G - E} := (G_v, G_e \setminus E)$$

Aufgrund des Fundierungsaxioms sind die Knoten- und die Kantenmenge eines Graphen immer disjunkt, weshalb die soeben definierte „Subtraktionen“ von Knoten und Kanten gefahrlos durch dasselbe Symbol „$-$“ dargestellt werden kann, da der gemeinte Fall eindeutig am zweiten Operanden ablesbar ist.

Definition 7
Für eine Menge von Knoten V eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{I_G(V)}$ *jenen Graphen, der aus G durch „Subtrahieren“ aller Knoten von G entsteht, die nicht in V enthalten sind, also:*

$$\boldsymbol{I_G(V)} := G - (G_v \setminus V)$$

$I_G(V)$ heißt der ***von V*** *(bezüglich G)* ***induzierte Graph****.*

Die Begriffe *Nachbarschaft* und *Nachbarschaft eines Grades* in der folgenden Definition werden etwa in *Aigner [1984]* eingeführt, *Stern* in *Hakimi et al. [1996]*. Die restlichen Begriffe wurden für die Zwecke dieser Arbeit selbst eingeführt.

Definition 8
Für einen Knoten v eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{N_G(v)}$ *die Vereinigung der Menge $\{v\}$ und der Menge aller zu v adjazenten Knoten von G, also:*

$$\boldsymbol{N_G(v)} := \{v\} \cup \{v' \in G_v | v, v' \text{ adjazent}\}$$

$\boldsymbol{N^\circ_G(v)}$ *ist $N_G(v)$ ohne v und heißt die* ***Nachbarschaft*** *von v (in G).*

Für eine Menge von Knoten V eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{N_G(V)}$ *die Vereinigung von V und aller Nachbarschaften aller Knoten in V, also:*

$$\boldsymbol{N_G(V)} := \bigcup_{v \in V} N_G(v)$$

$\boldsymbol{N_G^\circ(V)}$ *ist $N_G(V)$ ohne V und heißt die* **Nachbarschaft** *von V (in G).*

Für einen Knoten v eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{\overline{N_G}(v)}$ *jenen Teilgraphen von G, welcher v, alle zu v adjazenten Knoten und alle mit v inzidenten Kanten enthält, also:*

$$\boldsymbol{\overline{N_G}(v)} := (N_G(v), \{e \in G_e | v, e \text{ inzident}\})$$

$\overline{N_G}(v)$ *heißt der* **Nachbarschaftsstern** *von v (in G).*

Für eine Menge von Knoten V eines Graphen G bezeichnet $\boldsymbol{\overline{N_G}(V)}$ *die Vereinigung der Nachbarschaftssterne aller Knoten in V, also:*

$$\boldsymbol{\overline{N_G}(V)} := \bigcup_{v \in V} \overline{N_G}(v)$$

$\overline{N_G}(V)$ *heißt der* **Nachbarschaftsstern** *von V (in G).*

Für einen Knoten v eines Graphen G (dessen Knotenmenge gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit eine Teilmenge der natürlichen Zahlen bildet) bezeichnet $\boldsymbol{\overline{N_G}^+(v)}$ *jenen Teilgraphen von $\overline{N_G}(v)$, welcher nur jene Knoten enthält, die größer oder gleich v sind, also:*

$$\boldsymbol{\overline{N_G}^+(v)} := \overline{N_G}(v) - \{v' \in N_G(v) | v' < v\}$$

$\overline{N_G}^+(v)$ *heißt der* **positive Nachbarschaftsstern** *von v (in G).*

Für eine Menge von Knoten V eines Graphen G (dessen Knotenmenge gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit eine Teilmenge der natürlichen Zahlen bildet) bezeichnet $\boldsymbol{\overline{N_G}^+(V)}$ *die Vereinigung der positiven Nachbarschaftssterne aller Knoten in V minus aller Kanten des von V induzierten Graphen, also:*

$$\boldsymbol{\overline{N_G}^+(V)} := \bigcup_{v \in V} \overline{N_G}^+(v) - I_G(V)_e$$

$\overline{N_G}^+(V)$ *heißt der* **positive Nachbarschaftsstern** *von V (in G).*

Für einen Knoten v eines Graphen G und eine nicht-negative, ganze Zahl n bezeichnet $\boldsymbol{N_G(v, n)}$ *die Menge jener Knoten, die durch höchstens n-fache Bildung von Nachbarschaften, beginnend bei v, erreicht werden können, also:*

$$\boldsymbol{N_G(v, 0)} := \{v\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \boldsymbol{N_G(v, n+1)} := N_G(N_G(v, n))$$

$N_G(v, n)$ *heißt die* ***Nachbarschaft vom Grad*** n *von* v *(in* G*).*

Für eine Menge von Knoten V *eines Graphen* G *und eine nicht-negative, ganze Zahl* n *bezeichnet* $\boldsymbol{N_G(V, n)}$ *die Menge jener Knoten, die durch* n*-fache Bildung von Nachbarschaften, beginnend bei* V*, erreicht werden können, also:*

$$\boldsymbol{N_G(V, 0)} := V$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \boldsymbol{N_G(V, n+1)} := N_G(N_G(V, n))$$

$N_G(V, n)$ *heißt die* ***Nachbarschaft vom Grad*** n *von* V *(in* G*).*

Definition 9
Der (G-)Grad $\boldsymbol{deg_G(v)}$ *eines Knoten* v *eines Graphen* G *ist die Anzahl jener Kanten von* G*, welche mit* v *inzident sind, also:*

$$\boldsymbol{deg_G(v)} := \#N_G^\circ(v)$$

Definition 10
Der (G-)Abstand $\boldsymbol{d_G(v_1, v_2)}$ *zweier Knoten* v_1 *und* v_2 *eines Graphen* G *ist die kleinste (Infimum) nicht-negative, ganze Zahl* n*, sodass* v_2 *in der Nachbarschaft vom Grad* n *von* v_1 *enthalten ist, also:*

$$\boldsymbol{d_G(v_1, v_2)} := \inf\left(\{n \in \mathbb{N}_0 | v_2 \in N_G(v_1, n)\}\right)$$

Der (G-)Abstand $\boldsymbol{d_G(V_1, V_2)}$ *zweier Teilmengen* V_1 *und* V_2 *der Knotenmenge eines Graphen* G *ist der kleinste (Infimum) Abstand eines Knoten von* V_1 *zu einem Knoten von* V_2*, also:*

$$\boldsymbol{d_G(V_1, V_2)} := \inf\left(\{d_G(v_1, v_2) | v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}\right)$$

Definition 11
Ein Knoten v *eines Graphen* G *heißt* ***isoliert*** *(in* G*), falls er mit keiner Kante aus* G *inzident ist, also:*

$$v \textbf{ isoliert } (\text{in } G) \iff deg_G(v) = 0$$

Definition 12
Ein endliche Folge von Knoten $(v_1, \ldots, v_n)$ *eines Graphen* G *heißt* ***Weg in*** G *(der* ***Länge*** n*), falls jeder der ersten* $n-1$ *Knoten der Folge zum direkten Nachfolger adjazent ist, also:*

$$(v_1, \ldots, v_n) \textbf{ Weg in } G \iff \forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : v_i, v_{i+1} \text{ adjazent}$$

Ein Weg $(v_1, \ldots, v_n)$ *eines Graphen* G *heißt* ***Pfad in*** G *(der* ***Länge*** n*), falls alle Knoten des Weges paarweise disjunkt sind.*

Ein Pfad $(v_1, \ldots, v_n)$ eines Graphen G heißt ***Kreis in*** *G (der* ***Länge*** *n), falls der erste und der letzte Knoten des Pfades adjazent sind, also:*

$$(v_1, \ldots, v_n) \textbf{ Kreis in } G \iff v_1, v_n \text{ adjazent}$$

Definition 13
Ein Graph G heißt ***vollständig****, falls je zwei verschiedene Knoten von G adjazent sind, also:*

$$G \textbf{ vollständig} \iff \forall (v_1, v_2) \in {G_v}^2 \text{ p.v.: } v_1, v_2 \text{ adjazent}$$

Für eine nicht-negative, ganze Zahl n bezeichne $\boldsymbol{K_n}$ *einen beliebigen Repräsentanten der Isomorphieklasse aller vollständigen Graphen mit n Knoten.*

Definition 14
Für eine nicht-negative, ganze Zahl k heißt ein Graph G ***k-regulär****, falls alle Knoten von G den Grad k haben, also:*

$$G \textbf{ } k\textbf{-regulär} \iff \forall v \in G_v : deg_G(v) = k$$

Ein Graph G heißt ***regulär****, falls es eine nicht-negative, ganze Zahl k gibt, sodass G k-regulär ist.*

Definition 15
Ein Graph G heißt ***zusammenhängend****, falls es einen Knoten v von G gibt, sodass sich die Nachbarschaft vom Grad $\#G_v$ von v über ganz G_v erstreckt, also:*

$$G \textbf{ zusammenhängend} \iff \exists v \in G_v : N_G(v, \#G_v) = G_v$$

Insbesondere sind zusammenhängende Graphen nicht-leer.

Zusammenhang kann auch über Wege definiert werden. Dabei heißt ein Graph *zusammenhängend*, wenn er nicht-leer ist und es für je zwei Knoten einen Weg im Graphen gibt, der diese miteinander verbindet. Es ist leicht zu sehen, dass dieses Kriterium zur obigen Definition äquivalent ist.

Definition 16
Ein zusammenhängender Teilgraph H eines Graphen G heißt ***Zusammenhangskomponente*** *(von G), falls H maximal unter den zusammenhängenden Teilgraphen von G ist, also:*

$$H \textbf{ Zusammenhangskomponente } (\text{von } G) \iff \nexists H' \subseteq G \text{ zusammenhängend} : H \subset H'$$

Für einen Graphen G bezeichne $\boldsymbol{C_G}$ *die Menge seiner Zusammenhangskomponenten und* $\boldsymbol{q(G)}$ *die Anzahl jener Elemente von C_G, welche eine ungerade Anzahl von Knoten haben.*

Definition 17
Ein zusammenhängender Graph G heißt ***Pfad****, falls jeder Knoten von G Grad 1 oder 2 hat und es zumindest einen Knoten vom Grad 1 gibt, also:*

$$G \textbf{ Pfad} \iff \forall v \in G_v : deg_G(v) \in \{1, 2\}$$
$$\exists v \in G_v : deg_G(v) = 1$$

Die Zahl seiner Knoten heißt dann die ***Länge*** *des Pfades.*

Für eine natürliche Zahl n bezeichne $\boldsymbol{P_n}$ einen beliebigen Repräsentanten der Isomorphieklasse aller Pfade mit Länge n.

Definition 18
Ein zusammenhängender Graph G heißt ***Kreis****, falls jeder Knoten von G Grad 2 hat, also:*

$$G \textbf{ Kreis} \iff \forall v \in G_v : deg_G(v) = 2$$

Die Zahl seiner Knoten heißt dann die ***Länge*** *des Kreises.*

Für eine natürliche Zahl $n \geq 3$ bezeichne $\boldsymbol{C_n}$ einen beliebigen Repräsentanten der Isomorphieklasse aller Kreise mit Länge n.

Definition 19
Ein zusammenhängender Graph G heißt ***Baum****, falls seine Kantenmenge genau ein Element weniger hat, als seine Knotenmenge, also:*

$$G \textbf{ Baum} \iff \#G_e = \#G_v - 1$$

Ein Graph G heißt ***Wald****, falls alle Zusammenhangskomponenten von G Bäume sind.*

Bäume können auch über Pfade definiert werden. Dabei heißt ein Graph *Baum*, wenn er nicht-leer ist und es für je zwei Knoten genau einen Pfad im Graphen gibt, der diese miteinander verbindet. Es ist leicht zu sehen, dass dieses Kriterium zur obigen Definition äquivalent ist.

Der folgende Begriff stammt aus *Lovász and Plummer [1986, S. 336].*

Definition 20
Der ***Pfadbaum $\boldsymbol{T(G, v)}$*** *eines Graphen G* ***mit Wurzel*** *v (ein Knoten von G) entsteht aus G, indem die Menge aller Pfade in G, die in v beginnen als Knotenmenge von $T(G, v)$ betrachtet wird und je zwei Knoten in $T(G, v)$ als adjazent angenommen werden, wenn einer der beiden zugehörigen Pfade aus dem anderen durch Entfernen des letzten Knoten entsteht, also:*

$$\boldsymbol{T(G, v)} := (\{(a_1, \ldots, a_n) \text{ Pfad in } G | a_1 = v\},$$
$$\{\{(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_{n+1})\} \subseteq T(G, v)_v | \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i = b_i\})$$

Definition 21
Ein Graph G heißt ***bipartit****, falls es eine Zerlegung seiner Knotenmenge in zwei disjunkte, nicht-leere Mengen A und B gibt, sodass keine zwei Knoten aus A oder B adjazent sind, also:*

$$\begin{aligned} G \textbf{ bipartit} \iff \exists A \neq \emptyset : \exists B \neq \emptyset : G_v = A \dot\cup B \\ \forall (v_1, v_2) \in A^2 : v_1, v_2 \text{ nicht adjazent} \\ \forall (v_1, v_2) \in B^2 : v_1, v_2 \text{ nicht adjazent} \end{aligned}$$

Die Menge $\{A, B\}$ heißt dann ***Partition*** *von G und die Mengen A und B die* ***Teile der Partition****.*
Sind alle isolierten Knoten von G in einer der beiden Mengen enthalten, so nennt man die Partition ***geordnet****.*

Definition 22
Ein bipartiter Graph G mit Partition $\{A, B\}$ heißt ***vollständig bipartit****, falls jeder Knoten eines Teiles der Partition zu jedem Knoten des anderen Teiles adjazent ist, also:*

$$G \textbf{ vollständig bipartit} \iff \forall (v_1, v_2) \in A \times B : v_1, v_2 \text{ adjazent}$$

Für zwei natürliche Zahlen n und m bezeichne $\boldsymbol{K_{n,m}}$ einen beliebigen Repräsentanten der Isomorphieklasse aller vollständig bipartiten Graphen mit n und m Knoten in je einem Teil der Partition.

Definition 23
Die ***Adjazenzmatrix*** $\boldsymbol{A^G} = \left(\boldsymbol{A^G_{i,j}}\right)_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ *eines Graphen G (dessen Knotenmenge gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit ein bei 1 beginnendes Intervall natürlicher Zahlen bildet) mit n Knoten ist jene binäre $n \times n$-Matrix, deren Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte genau dann 1 ist, falls i und j adjazent sind, also:*

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : \boldsymbol{A^G_{i,j}} = 1 \iff i, j \text{ adjazent}$$

Die Begriffe der folgenden Definition wurden für die Zwecke dieser Arbeit selbst eingeführt.

Definition 24
Um die ***reduzierte Adjazenzmatrix*** $\boldsymbol{R^G} = \left(\boldsymbol{R^G_{i,j}}\right)_{(i,j)\in\{1,\dots,\boldsymbol{n^G}\}\times\{1,\dots,\boldsymbol{m^G}\}}$ *eines Graphen G (dessen Knotenmenge gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist) zu bilden, benennt man zuerst dessen Knoten unter Beibehaltung der Ordnung (und daher auf eindeutige Weise) derart um, dass die Knotenmenge ein bei 1 beginnendes Intervall natürlicher Zahlen bildet, setzt in der Adjazenzmatrix des resultierenden (isomorphen) Graphen alle Einträge oberhalb der Hauptdiagonale auf „0“ und streicht dann alle Nullzeilen und Nullspalten.*

In den zugehörigen ***reduzierten Positionsvektoren*** $\boldsymbol{Z^G} = \left(\boldsymbol{Z^G_i}\right)_{i\in\{1,\dots,\boldsymbol{n^G}\}}$ *und* $\boldsymbol{S^G} = \left(\boldsymbol{S^G_i}\right)_{i\in\{1,\dots,\boldsymbol{m^G}\}}$ *notiert man aufsteigend jene Knoten des ursprünglichen Graphen, deren Zeilen und Spalten nicht gestrichen wurden.*

Das Tupel $\left(\boldsymbol{R^G, Z^G, S^G}\right)$ *heißt* ***reduzierte Adjazenzdarstellung*** *(von* G*).*

Die zu einem Eintrag $R^G_{i,j}$ *der reduzierten Adjazenzmatix gehörenden Einträge* Z^G_i *und* S^G_i *der reduzierten Zeilen- und Spaltenvektoren heißen* ***Zeilenknoten*** *und* ***Spaltenknoten*** *des Eintrages.*

Für ein echt aufsteigendes Tupel $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m^G\}^n$ *bezeichne* $\boldsymbol{R^G_I}$ *jene Matrix, die aus* R^G *entsteht, wenn man die mit* I *gewählten Spalten nebeneinander schreibt und anschließend alle Nullzeilen, sowie jene Zeilen streicht, deren Zeilenknoten in der Menge der Spaltenknoten der mit* I *gewählten Spalten vorkommt.*

Beispiele zur soeben definierten reduzierten Adjazenzdarstellung finden sich im Unterabschnitt 6.1.2.

Definition 25
Der ***Kantengraph*** $\boldsymbol{L(G)}$ *eines Graphen* G *entsteht aus* G*, indem die Kantenmenge von* G *als Knotenmenge von* $L(G)$ *betrachtet wird und je zwei Knoten in* $L(G)$ *als adjazent angenommen werden, wenn die zugehörigen Kanten in* G *adjazent sind, also:*

$$\boldsymbol{L(G)} := (G_e, \{\{e_1, e_2\} \subseteq G_e | e_1, e_2 \text{ adjazent in } G\})$$

Der folgende Begriff stammt aus *Aigner [1984].*

Definition 26
Um die ***Biadjazenzmatrix*** $\boldsymbol{B^{G,A}} = \left(\boldsymbol{B^{G,A}_{i,j}}\right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}}$ *eines bipartiten Graphen* G *(dessen Knotenmenge gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist) mit Partition* $\{A, B\}$ ***bezüglich*** A *zu gewinnen, benennt man zuerst dessen Knoten unter Beibehaltung der Ordnung innerhalb beider Teile der Partition (und daher auf eindeutige Weise) derart um, dass die Knotenmenge ein bei* 1 *beginnendes Intervall natürlicher Zahlen bildet, und so zerlegt ist, dass die letzten* m *Knoten aus* A *stammen* $(\#A = m)$ *und wählt dann die rechte obere Teilmatrix der Adjazenzmatrix des resultierenden (isomorphen) Graphen.*

Für die Adjazenzmatrix und die Biadjazenzmatrix eines bipartiten Graphen G gilt dann:

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & B^{G,A} \\ \left(B^{G,A}\right)^T & 0 \end{pmatrix}$$

3.2. Färbungen

Färbungen dienen in dieser Arbeit der Einteilung der Knoten oder Kanten eines Graphen in zwei oder mehrere Klassen. Damit unterscheidet sich der Begriff von jenem der „zulässigen Färbungen“, deren Existenz in der Graphentheorie zumeist untersucht wird. Da die in dieser Arbeit betrachteten Graphen allesamt endlich sind und damit endliche Knoten- und Kantenmenge haben, genügt eine abzählbar unendliche Menge an „Etiketten“ oder „Farben“, um für alle möglichen Graphen jede erdenkliche Einteilung in Klassen erreichen zu können. Die Menge der natürlichen Zahlen erfüllt also diesen Zweck.

Definition 27
Eine ***Knotenfärbung*** f *eines Graphen* G *ist eine Abbildung von der Knotenmenge von* G *in die Menge der natürlichen Zahlen, deren Bild ein bei* 1 *beginnendes Intervall bildet, also:*

$$f \textbf{ Knotenfärbung } (\text{von } G) \iff f : G_v \mapsto \mathbb{N} \\ \exists n \in \mathbb{N} : Bild(f) = \{1, \ldots, n\}$$

n bezeichne in dem Fall die ***Anzahl der Farben*** *und für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne* $\boldsymbol{G_{f,i}}$ *den mit i gefärbten Teilgraphen.*

Ein ***knotengefärbter Graph*** *ist ein Tupel (G, f) bestehend aus einem Graphen G und einer Knotenfärbung f von G.*

Für einen beliebigen knotengefärbten Graphen G bezeichne $\boldsymbol{G}$ *auch den darunterliegenden Graphen und* $\boldsymbol{f^G}$ *die darunterliegende Knotenfärbung.*

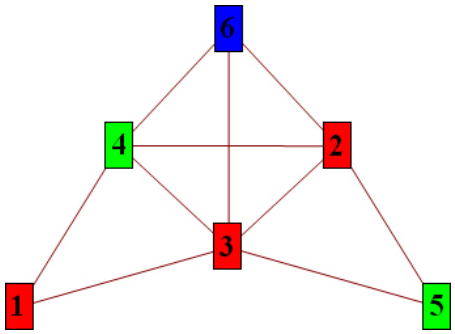


Abbildung 3.3.: Ein knotengefärbter Graph

Definition 28
Eine ***Kantenfärbung*** f *eines Graphen* G *ist eine Abbildung von der Kantenmenge von* G *in die Menge der natürlichen Zahlen, deren Bild ein bei* 1 *beginnendes Intervall bildet, also:*

$$f \textbf{ Kantenfärbung } (\text{von } G) \iff f : G_e \mapsto \mathbb{N} \\ \exists n \in \mathbb{N} : Bild(f) = \{1, \ldots, n\}$$

n bezeichne in dem Fall die ***Anzahl der Farben*** *und für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne* $\boldsymbol{G_{f,i}}$ *den mit i gefärbten Teilgraphen.*

Ein ***kantengefärbter Graph*** *ist ein Tupel (G, f) bestehend aus einem Graphen G und einer Kantenfärbung f von G.*

Für einen beliebigen kantengefärbten Graphen G bezeichne $\boldsymbol{G}$ *auch den darunterliegenden Graphen und* $\boldsymbol{f_G}$ *die darunterliegende Kantenfärbung.*

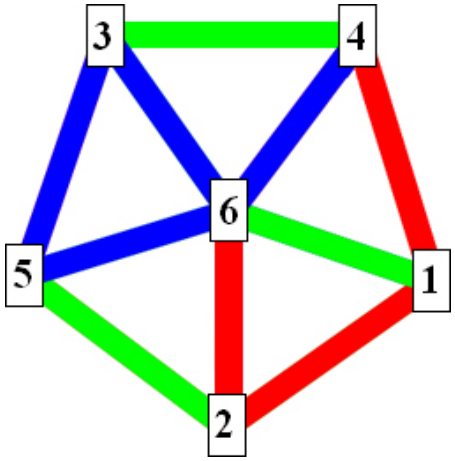


Abbildung 3.4.: Ein kantengefärbter Graph

Definition 29
Zwei knotengefärbte Graphen G_1 und G_2 heißen ***isomorph****, wenn beide gleich viele (n) Farben haben und es einen Isomorphismus zwischen G_1 und G_2 gibt, der die Färbung respektiert, also:*

$$G_1, G_2 \textbf{ isomorph} \iff$$
$$\iff \exists \phi \text{ Isomorphismus von } G_1 \text{ nach } G_2 : \forall v \in G_{1_v} : f^{G_2}(\phi(v)) = f^{G_1}(v)$$

Zwei kantengefärbte Graphen G_1 und G_2 heißen ***isomorph****, wenn beide gleich viele (n) Farben haben und es einen Isomorphismus zwischen G_1 und G_2 gibt, der die Färbung respektiert, also:*

$$G_1, G_2 \textbf{ isomorph} \iff$$
$$\iff \exists \phi \text{ Isomorphismus von } G_1 \text{ nach } G_2 : \forall e \in G_{1_e} : f_{G_2}(\phi(e)) = f_{G_1}(e)$$

Der folgende Begriff wurde für die Zwecke dieser Arbeit selbst eingeführt.

Definition 30
Für einen kantengefärbten Graphen G mit n Farben heißt das Tupel $\left(\left(\boldsymbol{R}^{G_{f_G,i}}, \boldsymbol{Z}^{G_{f_G,i}}, \boldsymbol{S}^{G_{f_G,i}}\right)\right)_{i\in\{1,\ldots n\}}$ *die* ***reduzierte Adjazenzdarstellung*** *(von G).*

Beispiele zur soeben definierten reduzierten Adjazenzdarstellung finden sich im Unterabschnitt 6.1.2.

3.3. Matchings und unabhängige Mengen

Matchings bilden den zentralen Begriff dieser Arbeit. Sie bezeichnen spezielle Teilmengen der Kantenmenge eines Graphen, die einem bestimmten Unabhängigkeitsbegriff genügen. Die meisten der folgende Begriffe stammen aus *Lovász and Plummer [1986]*. *K-Matching*, *K-unabhängige Menge*, *Matchingpolynome* und *Unabhängigkeitspolynome bezüglich einer Färbung*, sowie *quasiperfekt bezüglich* wurden allerdings für die Zwecke dieser Arbeit selbst eingeführt.

Definition 31
Eine Teilmenge M der Kantenmengen eines Graphen G heißt ***Matching*** *(von G), falls die in M enthaltenen Kanten paarweise nicht adjazent sind, also:*

$$M \textbf{ Matching } (\text{von } G) \iff \forall (e_1, e_2) \in M^2 : e_1, e_2 \text{ nicht adjazent}$$

Für eine nicht-negative, ganze Zahl k heißt ein Matching M eines Graphen G ***k-Matching*** *(von G), falls k die Kardinalität von M ist, also:*

$$M \textbf{ k-Matching } (\text{von } G) \iff \#M = k$$

Für eine nicht-negative, ganze Zahl k und einen Graphen G bezeichne $\boldsymbol{G_e}^{(\boldsymbol{k})}$ die Menge aller k-Matchings, also:

$$\boldsymbol{G_e}^{(\boldsymbol{k})} := \{M \subseteq G_e | M \text{ } k\text{-Matching}\}$$

Für ein n-Tupel $K = (k_1, \ldots, k_n)$ nicht-negativer, ganzer Zahlen heißt ein Matching M eines kantengefärbten Graphen G mit n Farben ***K-Matching*** *(von G), falls jeder Eintrag von K der Anzahl jener Kanten in M entspricht, welche gemäß der Position des Eintrages gefärbt sind, also:*

$$M \textbf{ K-Matching } (\text{von } G) \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \#\{e \in M | f_G(e) = i\} = k_i$$

Für ein n-Tupel K nicht-negativer, ganzer Zahlen und einen kantengefärbten Graphen G mit n Farben bezeichne $\boldsymbol{G_e}^{(\boldsymbol{K})}$ die Menge aller K-Matchings, also:

$$\boldsymbol{G_e}^{(\boldsymbol{K})} := \{M \subseteq G_e | M \text{ } K\text{-Matching}\}$$

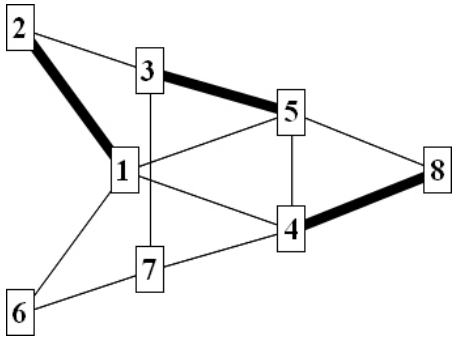


Abbildung 3.5.: Beispiel eines Matchings

Definition 32
Ein Matching M eines Graphen G heißt ***perfekt*** *(in G), falls jeder Knoten von G mit einer Kante aus M inzident ist, also:*

$$M \textbf{ perfekt } (\text{in } G) \iff \forall v \in G_v : \exists e \in M : v, e \text{ inzident}$$

Perfekte Matchings sind also spezielle k-Matchings von Graphen mit gerader Knotenanzahl, nämlich jene für $k = \frac{\#G_v}{2}$.

Definition 33
Ein Matching M eines Graphen G heißt ***maximal*** *(in G), falls G kein Matching mit echt größerer Kardinalität besitzt, also:*

$$M \textbf{ maximal } (\text{in } G) \iff \forall M' \text{ Matching von } G : \#M' \leq \#M$$

Für einen Graphen G heißt $\textbf{def}(\boldsymbol{G}) := \#G_v - 2\max\left(\left\{k \in \mathbb{N}_0 | {G_e}^{(k)} \neq \emptyset\right\}\right)$ *das* ***Defizit*** *von G.*

Definition 34
Ein Matching M eines bipartiten Graphen G mit Partition $\{A, B\}$ heißt ***quasiperfekt bezüglich*** *A (in G), falls jeder Knoten von A mit einer Kante aus M inzident ist, also:*

$$M \textbf{ quasiperfekt bezüglich } A \ (\text{in } G) \iff \forall v \in A : \exists e \in M : v, e \text{ inzident}$$

Insbesondere sind bezüglich beider Teile der Partition eines bipartiten Graphen quasiperfekte Matchings perfekt.

Definition 35
Ein Pfad $(v_1, \ldots, v_n)$ in einem Graphen G heißt ***alternierend*** *(bezüglich eines Matchings M) (in G), falls von jedem Paar aufeinanderfolgender Kanten des Pfades genau eine zu M gehört, also:*

$$\begin{aligned}&(v_1, \ldots, v_n) \textbf{ alternierend } (\text{bezüglich } M) \ (\text{in } G) \iff \\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots n-2\} : \#(M \cap \{v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_{i+2}\}) = 1\end{aligned}$$

Ein bezüglich eines Matchings M eines Graphen G alternierender Pfad $(v_1, \ldots, v_n)$ in G heißt ***Verbesserungspfad*** *(bezüglich M) (in G), falls weder der erste noch der letzte Knoten des Pfades mit einer Kante von M inzident ist, also:*

$$\begin{aligned}&(v_1, \ldots, v_n) \textbf{ Verbesserungspfad } (\text{bezüglich } M) \ (\text{in } G) \iff \\ &\iff \nexists e \in M : (v_1, e \text{ inzident} \vee v_n, e \text{ inzident})\end{aligned}$$

Definition 36
Eine Teilmenge U der Knotenmenge eines Graphen G heißt ***unabhängige Menge*** *(von G), falls die in U enthaltenen Knoten paarweise nicht adjazent sind, also:*

$$\begin{aligned}&U \textbf{ unabhängige Menge } (\text{von } G) \iff \\ &\iff \forall (v_1, v_2) \in U^2 : v_1, v_2 \text{ nicht adjazent}\end{aligned}$$

Für eine nicht-negative, ganze Zahl k heißt eine unabhängige Menge U eines Graphen G ***k-unabhängige Menge*** *(von G), falls k die Kardinalität von U ist, also:*

$$U \textbf{ } \boldsymbol{k}\textbf{-unabhängige Menge } (\text{von } G) \iff \#U = k$$

Für eine nicht-negative, ganze Zahl k und einen Graphen G bezeichne $\boldsymbol{G_v^{(k)}}$ *die Menge aller k-unabhängigen Mengen, also:*

$$\boldsymbol{G_v^{(k)}} := \{U \subseteq G_v | U \text{ } k\text{-unabhängige Menge}\}$$

Für ein n-Tupel $K = (k_1, \ldots, k_n)$ nicht-negativer, ganzer Zahlen heißt eine unabhängige Menge U eines knotengefärbten Graphen G mit n Farben ***K-unabhängige Menge*** *(von G), falls jeder Eintrag von K der Anzahl jener Knoten in U entspricht, welche gemäß der Position des Eintrages gefärbt sind, also:*

$$U \textbf{ K-unabhängige Menge } (\text{von } G) \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \#\{v \in U | f^G(v) = i\} = k_i$$

Für ein n-Tupel K nicht-negativer, ganzer Zahlen und einen knotengefärbten Graphen G mit n Farben bezeichne $\boldsymbol{G_v^{(K)}}$ *die Menge aller K-unabhängigen Mengen, also:*

$$\boldsymbol{G_v^{(K)}} := \{U \subseteq G_v | U \text{ } K\text{-unabhängige Menge}\}$$

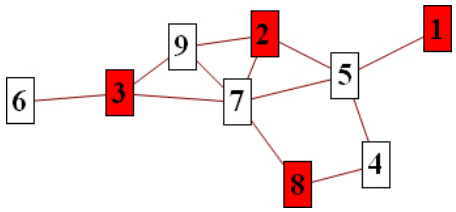


Abbildung 3.6.: Beispiel einer unabhängigen Menge

Definition 37
Eine Teilmenge U der Knotenmenge eines Graphen G heißt ***Knotenüberdeckung*** *(von G), falls jede Kante von G mit einem Knoten aus U inzident ist, also:*

$$U \textbf{ Knotenüberdeckung } (\text{von } G) \iff \forall e \in G_e : \exists v \in U : v, e \text{ inzident}$$

Eine Teilmenge U der Knotenmenge eines Graphen G heißt ***Clique*** *(von G), falls je zwei verschiedene Knoten von U adjazent sind, also:*

$$U \textbf{ Clique } (\text{von } G) \iff \forall (v_1, v_2) \in U^2 \text{ p.v.: } v_1, v_2 \text{ adjazent}$$

Eine Teilmenge U der Knotenmenge eines Graphen G heißt ***Stabile Menge*** *(von G), falls keine zwei Knoten von U adjazent sind, also:*

$$U \textbf{ Stabile Menge } (\text{von } G) \iff \nexists (v_1, v_2) \in U^2 : v_1, v_2 \text{ adjazent}$$

Definition 38
Eine Knotenüberdeckung U eines Graphen G heißt ***minimal*** *(in G), falls G keine Knotenüberdeckung mit echt kleinerer Kardinalität besitzt, also:*

$$U \textbf{ minimal } (\text{in } G) \iff \forall U' \text{ Knotenüberdeckung von } G : \#U' \geq \#U$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten *Matchingpolynome* und *Unabhängigkeitspolynome* zu definieren. Allen gemeinsam ist, dass in ihren Koeffizienten die Anzahlen der k-Matchings, beziehungsweise k-unabhängigen Mengen kodiert sind. In dieser Arbeit wird die vermutlich nächstliegende verwendet.

Definition 39
Für einen Graphen G heißt das Polynom

$$\boldsymbol{P_G^e} \in \mathbb{R}[x]$$
$$P_G^e(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \#{G_e}^{(k)} \cdot x^k$$

das ***Matchingpolynom*** *(von G).*

Für einen kantengefärbten Graphen G mit n Farben und Kantenfärbung f heißt das Polynom

$$\boldsymbol{P_{G,f}^e} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$
$$P_{G,f}^e(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{K=(k_1,\ldots,k_n)\in {\mathbb{N}_0}^n} \#{G_e}^{(K)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$$

das ***Matchingpolynom*** *(von G bezüglich f).*

Definition 40
Für einen Graphen G heißt das Polynom

$$\boldsymbol{P_G^v} \in \mathbb{R}[x]$$
$$P_G^v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \#{G_v}^{(k)} \cdot x^k$$

das ***Unabhängigkeitspolynom*** *(von G).*

Für einen knotengefärbten Graphen G mit n Farben und Knotenfärbung f heißt das Polynom

$$\boldsymbol{P_{G,f}^v} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$
$$P_{G,f}^v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{K=(k_1,\ldots,k_n)\in {\mathbb{N}_0}^n} \#{G_v}^{(K)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$$

das ***Unabhängigkeitspolynom*** *(von G bezüglich f).*

Für einen kantengefärbten Graphen G gilt damit insbesondere:

$$P_G^e(x) = P_{G,f}^e(x, \ldots, x)$$

und analog für einen knotengefärbten Graphen:

$$P_G^v(x) = P_{G,f}^v(x, \ldots, x)$$

Definition 41
Für einen Graphen G heißt das Polynom

$$\boldsymbol{Q_G} \in \mathbb{R}[x]$$
$$Q_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \#{G_e}^{(k)} x^{\#G_v - 2k}$$

das ***Defektpolynom*** *(von G).*

Der Zusammenhang zwischen dem Matchingpolynom und dem Defektpolynom eines Graphen wird in Lemma 4.2.1 gezeigt.

3.4. Permanente und verallgemeinerte Permanente

Die Begriffe der folgenden beiden Definitionen stammen aus *Minc [1978]*.

Definition 42
Die ***Permanente perm(A)*** *einer quadratischen Matrix* $A = (A_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist die folgende reelle Zahl:*

$$\boldsymbol{perm(A)} := \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Die Permanente einer binären Matrix ist also die Anzahl der Möglichkeiten, in jeder Spalte genau eine „1“ auszuwählen, sodass keine zwei in derselben Zeile stehen. Diese Eigenschaft inspiriert die folgende Verallgemeinerung auf beliebige (auch nicht-quadratische) Matrizen:

Definition 43
Die ***verallgemeinerte Permanente perm(A)*** *einer Matrix*
$A = (A_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *ist die folgende reelle Zahl:*

$$\boldsymbol{perm(A)} := \sum_{\sigma\in\{f:\{1,\ldots,m\}\mapsto\{1,\ldots,n\}|f\ injektiv\}} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

3.5. Weitere Definitionen

Die folgenden Polynome sind Erfindungen ihrer jeweiligen Namensgeber: Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow (*Tschebyschow [1854]*), Charles Hermite (*Hermite [1864]*), Edmond Laguerre (*Laguerre [1879]*) und Leonardo „Fibonacci“ von Pisa (*von Pisa [1202]*). Sie werden in der Literatur nicht einheitlich definiert, doch die in dieser Arbeit verwendeten Version sind zumindest sehr häufig zu finden.

Definition 44
Die durch die folgende Drei-Term-Rekursion gebildeten, reellen Polynome heißen ***Tschebyschow-Polynome erster Art****:*

$$\begin{aligned}&T_0(x) := 1\\&T_1(x) := x\\&\forall n \in \mathbb{N} : T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ heißt T_n das ***n-te Tschebyschow-Polynom erster Art****.*

Die durch die folgende Drei-Term-Rekursion gebildeten, reellen Polynome heißen ***Tschebyschow-Polynome zweiter Art****:*

$$\begin{aligned}&U_0(x) := 1\\&U_1(x) := 2x\\&\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1}(x) := 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ heißt U_n das ***n-te Tschebyschow-Polynom zweiter Art****.*

Definition 45
Die durch die folgende Drei-Term-Rekursion gebildeten, reellen Polynome heißen ***Hermite-Polynome****:*

$$\begin{aligned}&H_0(x) := 1\\&H_1(x) := x\\&\forall n \in \mathbb{N} : H_{n+1}(x) := xH_n(x) - nH_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ heißt H_n das ***n-te Hermite-Polynom****.*

Definition 46
Die folgenden reellen Polynome heißen ***verallgemeinerte Laguerre-Polynome****:*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 : L_n^{(m)}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+m}{n-k} x^k$$

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ heißt $L_n^{(m)}$ das ***n-te verallgemeinerte Laguerre-Polynom****.*

Definition 47
Die durch die folgende Drei-Term-Rekursion gebildeten, reellen Polynome heißen ***Fibonacci-Polynome****:*

$$\begin{aligned}&F_0(x) := 1\\&F_1(x) := 1\\&\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+1}(x) := F_n(x) + xF_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ heißt F_n das ***n-te Fibonacci-Polynom****.*

4. Matchings

Das Wort „Matching“ wird oft mit „Paarung“ übersetzt und deutet an, dass damit das Problem der Bildung von Paaren abstrahiert werden soll. Am deutlichsten wird dies im Fall eines bipartiten Graphen. Repräsentiert etwa der eine Teil seiner Partition eine gewisse Menge von Personen und der andere eine Menge von Jobs, und ist eine Person mit einem Job durch eine Kante verbunden, falls sich die Person für den entsprechenden Job beworben hat, so hat eine mögliche Entscheidung darüber, wer nun welchen Job tatsächlich bekommt natürlich die Eigenschaft, als Auswahl der Kanten ein Matching zu bilden, da weder ein Job an zwei Personen vergeben werden, noch eine Person zwei Jobs erledigen kann. In einem weiteren, gerne gegebenen Beispiel stehen die beiden Teile der Partition für je eine Gruppe von Männern und Frauen, und eine Kante drückt aus, dass sich eine Frau und der mit ihr verbundene Mann füreinander interessieren (dass der Graph bipartit ist, bedeutet in dem Zusammenhang also, dass es in den speziellen Gruppen – zumindest keine auf Gegenseitigkeit beruhende – homosexuellen Interessen gibt). Entscheiden sich nun einige der Frauen und Männer dazu, tatsächlich zu heiraten, so bilden die dadurch ausgewählten Kanten in monogamen Gesellschaften natürlich ebenfalls ein Matching. In beiden Beispielen wird es wünschenswert sein, ein möglichst großes Matching zu finden und im Idealfall sogar eines, bei dem jeder Job vergeben wird und gleichzeitig auch jeder einen Job bekommt, beziehungsweise alle Männer und Frauen am Ende verheiratet sind. Ist dies der Fall, so nennt man das entsprechende Matching perfekt.

Eine der meist untersuchten Fragen im Zusammenhang mit Matchings ist nun jene nach der Existenz solcher perfekter Matchings. Ist diese gegeben, so interessiert man sich darüber hinaus auch für deren Anzahl. Im folgenden Abschnitt geht es um die Existenz-Frage. Das Berechnen der Anzahl – auch von Matchings anderer Kardinalitäten (k-Matchings) – ist Inhalt von Kapitel 6.

4.1. Allgemeine Sätze über Matchings

4.1.1. Der Satz von König

Der Satz von König (*König [1931]*) wird in den meisten Büchern über Graphentheorie bewiesen, so auch in *Diestel [2000, S. 32]*. Er beschreibt einen Zusammenhang zwischen Matchings und Knotenüberdeckungen in bipartiten Graphen und dient als Hilfssatz im Beweis des Satzes von Hall.

Satz 4.1.1
Sei G ein bipartiter Graph.

Dann gilt:
$\max(\{\#M | M \text{ Matching von } G\}) = \min(\{\#U | U \text{ Knotenüberdeckung von } G\})$

Beweis:
Sei $\{A, B\}$ eine Partition von G,
M ein maximales Matching von G
($\iff \nexists P : P$ Verbesserungspfad bezüglich M, *Berge [1957]*),
$f : M \mapsto G_v$

$$ab \to \begin{cases} b\ (\in B) & \text{falls } \exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists P \in (A \setminus \bigcup M) \times {G_v}^n \times \{b\} : P \text{ alt. Pfad} \\ a\ (\in A) & \text{sonst} \end{cases}$$

und $U := f(M)$.

In U befindet sich also genau ein Knoten jeder Kante in M, und zwar der Knoten in B, falls es einen alternierenden Pfad gibt, der in A, aber außerhalb von M beginnt und in diesem Knoten endet, und sonst der Knoten in A. Außerdem bildet U eine Knotenüberdeckung von G (und damit – da M ein Matching ist – auch eine minimale Knotenüberdeckung, woraus die Behauptung des Satzes folgt), wie die folgende Überlegung zeigt:
Es sei ab eine beliebige Kante von G ($a \in A, b \in B$). Zu zeigen ist nun, dass eine der beiden Knoten in U enthalten ist. Ist ab eine Kante in M, so gilt dies nach Definition von U. Ist ab nicht in M und a mit keiner Kante aus M inzident, so ist – aufgrund der Maximalität von M – b mit einer Kante aus M inzident und ab ein alternierender Pfad, der in A aber außerhalb von M beginnt und in b endet. Also ist b in U enthalten. Ist hingegen ab nicht in M und a nicht in U, aber mit einer Kante ab' in M inzident, so ist b' in U. Also gibt es einen alternierenden Pfad P', der in A und außerhalb von M beginnt und in b' endet. Je nachdem, ob b in P' enthalten ist oder nicht, bildet P' bis b, oder $P'ab$ einen ebensolchen Pfad P, der allerdings in b endet. Wäre nun b nicht in U enthalten, so wäre b mit keiner Kante aus M inzident und P daher ein Verbesserungspfad bezüglich M, was im Widerspruch zur Maximalität von M stünde. Daher muss b in U enthalten sein und U damit eine Knotenüberdeckung von G. □

4.1.2. Der Satz von Hall

Der Satz von Hall (*Hall [1935]*) liefert ein Kriterium für die Existenz quasiperfekter Matchings in bipartiten Graphen. Er wird – zusammen mit den beiden Korollaren – in *Diestel [2000, S. 33ff]* auf die folgende Art bewiesen.

Satz 4.1.2
Sei G ein bipartiter Graph mit Partition $\{A, B\}$.
Dann gilt:
$\exists M$ Matching: M quasiperfekt bezüglich A $\iff \forall V \subseteq A : \#V \leq \#N_G^\circ(V)$

Beweis:
Natürlich impliziert die Existenz eines bezüglich A quasiperfekten Matchings, dass die Nachbarschaft jeder Teilmenge von A mehr Elemente enthalten muss, als die Teilmenge selbst.

Die Umkehrung kann über einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden. Es sei also angenommen, dass G kein bezüglich A quasiperfektes Matching besitze. Aus dem Satz von König folgt dann, dass es eine Knotenüberdeckung U von M gibt, welche echt

weniger Elemente hat, als A. Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ eine Zerlegung von U, so gilt $\#A' + \#B' = \#U < \#A$ und daher $\#B' < \#A - \#A' = \#(A \setminus A')$. Da U eine Knotenüberdeckung von G ist, kann es keine Kante von G geben, die einen Knoten aus $A \setminus A'$ mit einem Knoten aus $B \setminus B'$ verbindet und daher gilt für die Nachbarschaft von $A \setminus A'$: $\#N_G^\circ(A \setminus A') \leq \#B' < \#(A \setminus A)$, was – da $A \setminus A'$ eine Teilmenge von A ist – einen Widerspruch darstellt. □

Korollar 4.1.3
Seien G ein bipartiter Graph mit Partition $\{A, B\}$ und $d \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt:
$\forall V \subseteq A : \#V - d \leq \#N_G^\circ(V) \Longrightarrow \exists M$ *Matching*: $\#M = \#A - d$

Beweis:
Bildet man einen Graphen G', indem man d neue Knoten zu G hinzufügt und jeden dieser Knoten mit jedem Knoten in A verbindet, so gilt für alle Teilmengen V von A: $\#V \leq \#N_{G'}^\circ(V)$ und daher nach dem Satz von Hall, dass es ein bezüglich A quasiperfektes Matching von G' gibt. Zumindest $\#A - d$ der Kanten dieses Matchings müssen aber auch in G enthalten sein. □

Korollar 4.1.4
Sei G ein bipartiter, k-regulärer Graph mit $k \geq 1$.

Dann gilt:
$\exists M$ *Matching*: M *perfekt*

Beweis:
Es sei $\{A, B\}$ eine Partition von G. Da G ein k-regulärer Graph mit $k \geq 1$ ist, müssen A und B gleich viele Elemente enthalten. Außerdem sind die Knoten jeder Teilmenge V von A mit genau $k \cdot \#V$ Kanten von G inzident. Diese sind Teil jener $k \cdot \#N_G^\circ(V)$ Kanten von G, die mit den Knoten der Nachbarschaft von V inzident sind. Daher muss $k \cdot \#V \leq k \cdot \#N_G^\circ(V)$, also $\#V \leq \#N_G^\circ(V)$ gelten. Aus dem Satz von Hall folgt nun, dass es ein bezüglich A quasiperfektes Matching gibt und da A und B gleich viele Elemente enthalten, ist dieses Matching sogar perfekt. □

4.1.3. Der Satz von Tutte

Dieser Satz (*Tutte [1947]*) liefert ein Kriterium für die Existenz perfekter Matchings in allgemeinen Graphen und wird in *Diestel [2000, S. 37ff]* bewiesen.

Satz 4.1.5
Sei G ein Graph.

Dann gilt:
$\exists M$ *Matching*: M *perfekt* $\iff \forall V \subseteq G_v : q(G - V) \leq \#V$

Beweis:
Besitzt G ein perfektes Matching und entsteht nach Entfernung einer beliebigen Teilmenge V der Knotenmenge eine Zusammenhangskomponente C mit ungerader Anzahl an Knoten, so muss ein Knoten von C zu einem Knoten von V adjazent gewesen sein. Für jede Zusammenhangskomponente mit ungerader Anzahl an Knoten gibt es also einen

Knoten in V und diese Knoten sind – da M ein Matching ist – paarweise verschieden. Die Menge V enthält also tatsächlich zumindest gleich viele Knoten, wie es nach ihrer Entfernung aus G Zusammenhangskomponenten mit ungerader Anzahl an Knoten gibt.

Die Umkehrung kann über einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden. Es sei also angenommen, dass G kein perfektes Matching besitze. Außerdem kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit angenommen werden, dass G diese Eigenschaft (kein perfektes Matching zu besitzen) durch Hinzufügen einer weiteren Kante verliert, also „kantenmaximal“ bezüglich dieser Eigenschaft ist, wie die folgende Überlegung zeigt: Ist G' ein Graph, der aus G durch Hinzufügen einer Kante gebildet wurde und verletzt eine Teilmenge V der Knotenmenge von G die Bedingung $q(G' - V) \leq \#V$, so verletzt sie auch $q(G - V) \leq \#V$. Ist die zusätzliche Kante nämlich mit einem Knoten aus V inzident, so wird sie mit V aus G' entfernt und es gilt $C_{G-V} = C_{G'-V}$ und damit natürlich $q(G - V) = q(G' - V)$. Verbindet sie zwei Knoten, welche in einer Zusammenhangskomponente von $G - V$ liegen, so ändert sich in dieser nicht die Anzahl der Knoten und alle anderen Zusammenhangskomponenten bleiben unverändert, weshalb offensichtlich ebenfalls $q(G - V) = q(G' - V)$ gilt. Verbindet sie zwei Knoten, welche in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G - V$ liegen und hat die entstehende Zusammenhangskomponenten von $G' - V$ eine ungerade Anzahl von Knoten, so muss auch eine der beiden verbundenen Zusammenhangskomponenten eine ungerade Anzahl von Knoten haben, während die anderen Zusammenhangskomponenten unverändert bleiben und es gilt daher wieder $q(G - V) = q(G' - V)$. Hat die entstehende Zusammenhangskomponente eine gerade Anzahl von Knoten, so haben die verbundenen Zusammenhangskomponenten entweder beide eine gerade oder eine ungerade Anzahl an Knoten und es gilt in jedem Fall $q(G - V) \geq q(G' - V)$.

Verletzt nun eine Teilmenge V der Kantenmenge von G die Bedingung $q(G-V) \leq \#V$, so sind aufgrund der Kantenmaximalität alle Zusammenhangskomponenten von $G - V$ vollständig und jeder Knoten von V ist zu jedem anderen Knoten von G adjazent. Auch die Umkehrung dieser Aussage ist wahr. Würde V nämlich $q(G - V) \leq \#V$ erfüllen, so könnte ein perfektes Matching gefunden werden, indem für jede Zusammenhangskomponenten mit ungerader Anzahl von Knoten eine Kante gewählt wird, welche je einen der Knoten dieser Zusammenhangskomponenten mit je einem Knoten aus V verbindet (derer es ausreichend gibt) und für die verbleibenden Knoten in den Zusammenhangskomponenten sowie für die zusätzlichen Knoten von V (welche in gerader Anzahl vorhanden sein müssen, da G sonst eine ungerade Anzahl von Knoten hätte und damit die leere Menge $q(G - \emptyset) \leq \#\emptyset$ verletzen würde), eine beliebige, offensichtlich existierende Auswahl der Kanten getroffen wird, welche das Matching „komplettiert“.

Sei nun V die Menge aller Knoten von G, welche zu allen anderen Knoten von G adjazent sind. Es gibt also eine Zusammenhangskomponente C von $G - V$, welche nicht vollständig ist, in dieser also zwei (verschiedene) Knoten a und a', welche nicht adjazent sind. Sei weiters (a, b, c) der Anfang eines kürzesten Pfades in C von a nach a'. Es sind also ab und bc Kanten in G, nicht jedoch ac. Da b kein Element von V ist, gibt es einen Knoten d von G, sodass auch bd keine Kante von G ist. Fügt man jedoch eine der beiden Kanten ac und bd zu G hinzu, so besitzt der entstehende Graph aufgrund der Kantenmaximalität von G jeweils ein perfektes Matching (M_a für ac und M_b für bd).

Sei $P = d \cdots z$ ein maximaler Pfad in G, welcher in d mit eine Kante aus M_a beginnt und abwechselnd Kanten aus M_a und M_b enthält. Ist die letzte Kante von P nun in M_a enthalten, so muss $z = b$ gelten, da P sonst fortsetzbar wäre. Liegt sie in M_b, so muss jene Kante aus dem perfekten Matching M_a, welche mit z inzident ist, aus dem selben Grund ac sein, also entweder $z = a$ oder $z = c$ gelten. In beiden Fällen erhält man über $K := P$ beziehungsweise $K := Pb$ einen Kreis in $G \cup (\{b, d\}, \{bd\})$ von gerader Länge und jede zweite Kante von K (als Kanten von K seien jene bezeichnet, die einen Knoten aus K mit dem direkten Nachfolger verbinden, sowie den letzten mit dem ersten) liegt in M_b. Entfernt man nun aus M_b alle Kanten aus K, die in M_b liegen und fügt dafür alle anderen (aus K) hinzu, so erhält man ein perfektes Matching von G, also einen Widerspruch. □

Der Satz von Tutte lässt sich zur Tutte-Berge Formel (*Berge [1958]*) verallgemeinern, welche die Kardinalität eines maximalen Matchings für einen beliebigen Graphen G angibt, beziehungsweise den *Grad seines Matchingpolynoms*. Es gilt der folgende

Satz 4.1.6
Sei G ein Graph.
Dann gilt:
$\max\left(\left\{k \in \mathbb{N}_0 | {G_e}^{(k)} \neq \emptyset\right\}\right) = \frac{1}{2}\min\left(\{\#V - q(G - V) + \#G_v | V \subseteq G_v\}\right)$

4.2. Matchingpolynome

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Aussagen über Matching- und Unabhängigkeitspolynome zusammengefasst. Wie in *Levit and Mandrescu [2005]* angemerkt wird, stellt das Unabhängigkeitspolynom eine Verallgemeinerung des Matchingpolynoms dar, da für einen beliebigen Graphen G stets $P^e_G = P^v_{L(G)}$ gilt. Daher sind alle Aussagen über Unabhängigkeitspolynome auch für Matchingpolynome anwendbar.

Die Aussagen aus Lemma 4.2.1, Lemma 4.2.2, Lemma 4.2.3 und Lemma 4.2.4 stammen aus *Gutman and Harary [1983]*, *Gutman and El-Basil [1984]*, sowie *Lovász and Plummer [1986, S. 334 ff]*.

Die Formeln für die Matchingpolynome von Pfaden, Kreisen, vollständige Graphen und vollständige bipartite Graphen stammen aus *Godsil and Gutman [1981a]*, wobei letztere dort fehlerhaft ist und korrigiert wurde (es fehlt der Faktor $n!$).

4.2.1. Matching- und Defektpolynom

Die Matching- und Defektpolynome eines Graphen können durch die folgenden Beziehungen ineinander übergeführt werden.

Lemma 4.2.1
Sei G ein Graph.
Dann gilt:
$Q_G(x) = x^{\#G_v} P^e_G\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
$P^e_G(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}}\right)^{\#G_v} Q_G\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{x}}\right)$

Beweis:

$$x^{\#G_v} P_G^e\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = x^{\#G_v} \sum_{k=0}^{\infty} \#G_e{}^{(k)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \#G_e{}^{(k)} \cdot x^{\#G_v - 2k} = Q_G(x)$$

$$\left(\tfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}}\right)^{\#G_v} Q_G\left(\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{x}}\right) = \left(\tfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}}\right)^{\#G_v} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \#G_e{}^{(k)} \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{x}}\right)^{\#G_v - 2k} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \#G_e{}^{(k)} \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{x}}\right)^{-2k} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \#G_e{}^{(k)} (-1)^k x^k = P_G^e(x) \; \square$$

Es gibt also keinen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Polynomen. Allerdings lassen sich manche Aussagen mit einem der beiden einfacher formulieren.

4.2.2. Disjunkte Vereinigung von Graphen

Lemma 4.2.2
Seien G und H disjunkte Graphen.

Dann gilt:
$P^v_{G\cup H} = P^v_G \cdot P^v_H$
$P^e_{G\cup H} = P^e_G \cdot P^e_H$
$Q_{G\cup H} = Q_G \cdot Q_H$

Beweis:
Es wird die Aussage für Unabhängigkeitspolynome gezeigt. Für Matchingpolynome gilt dann:

$$P^e_{G\cup H} = P^v_{L(G\cup H)} = P^v_{L(G)\cup L(H)} = P^v_{L(G)} \cdot P^v_{L(H)} = P^e_G \cdot P^e_H$$

und für Defektpolynome gemäß Lemma 4.2.1:

$$Q_{G\cup H}(x) = x^{\#(G\cup H)_v} P^e_{G\cup H}\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = x^{\#G_v} x^{\#H_v} P^e_G\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) P^e_H\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = Q_G(x) \cdot Q_H(x)$$

Jede unabhängige Menge von $G \cup H$ ist die disjunkte Vereinigung einer unabhängigen Menge von G und einer unabhängigen Menge von H. Umgekehrt bildet jede Vereinigung einer unabhängigen Menge von G und einer unabhängigen Menge von H eine unabhängige Menge von $G \cup H$. Damit gilt für eine nicht-negative, ganze Zahl k und den k-ten Koeffizient des Unabhängigkeitspolynoms von $G \cup H$:

$$\#G \cup H_v{}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \#G_v{}^{(i)} \cdot \#H_v{}^{(k-i)}$$

und daher für das gesamte Unabhängigkeitspolynom: $P^v_{G\cup H} = P^v_G \cdot P^v_H$. $\square$

4.2.3. Entfernung von Knoten und Kanten

Lemma 4.2.3
Seien G ein Graph, $ab \in G_e$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt:
$\#G_v{}^{(k)} = \#(G-a)_v{}^{(k)} + \#(G-N_G(a))_v{}^{(k-1)}$
$\#G_e{}^{(k)} = \#(G-ab)_e{}^{(k)} + \#(G-a-b)_e{}^{(k-1)}$

Insbesondere:
$P_G^v(x) = P_{G-v}^v(x) + xP_{G-N_G(v)}^v(x)$
$P_G^e(x) = P_{G-ab}^e(x) + xP_{G-a-b}^e(x)$
$Q_G(x) = xQ_{G-a}(x) - \sum_{b \in N_G^\circ(a)} Q_{G-a-b}(x)$
$Q_G(x) = Q_{G-ab}(x) - Q_{G-a-b}(x)$

Beweis:
$\#(G-N_G(a))_v{}^{(k-1)}$ ist die Anzahl jener k-unabhängigen Mengen von G, welche a enthalten und $\#(G-a)_v{}^{(k)}$ die Anzahl jener, welche a nicht enthalten, wodurch die erste Aussage gezeigt ist. Analog lässt sich die zweite Aussage beweisen.

Für das Defektpolynom gilt gemäß Lemma 4.2.1:

$$\begin{aligned} Q_G(x) = x^{\#G_v} P_G^e\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = x^{\#G_v} P_{G-ab}^e\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) + x^{\#G_v}\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) P_{G-a-b}^e\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = \\ x^{\#(G-ab)_v} P_{G-ab}^e\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) - x^{\#(G-a-b)_v} P_{G-a-b}^e\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = \\ Q_{G-ab}(x) - Q_{G-a-b}(x) \end{aligned}$$

Durch sukzessives Entfernen aller mit a inzidenten Kanten folgt:

$$Q_G(x) = xQ_{G-a}(x) - \sum_{b \in N_G^\circ(a)} Q_{G-a-b}(x) \ \square$$

4.2.4. Matchingpolynom eines Waldes

Lemma 4.2.4
Seien G ein Wald und $\chi(x) := \det\left(xE - A^G\right)$ das charakteristische Polynom der Adjazenzmatrix von G.

Dann gilt:
$Q_G = \chi$

Beweis:
Gemäß Lemma 4.2.3 gilt für das Defektpolynom:

$$Q_G(x) = xQ_{G-a}(x) - \sum_{b \in N_G^\circ(a)} Q_{G-a-b}(x)$$

Ist die Kantenmenge von G leer, so gilt offensichtlich die Aussage des Lemmas.

Sei nun also die Kantenmenge von G nicht-leer und seine Knotenmenge gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit ein bei 1 beginnendes Intervall natürlicher Zahlen und derart, dass der Knoten 1 Grad 1 hat und zum Knoten 2 adjazent ist (was für einen Wald mit nicht-leerer Kantenmenge immer möglich ist). Dann gilt für das charakteristische Polynom der Adjazenzmatrix von G:

$$\det\left(xE - A^G\right) = \det\begin{pmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & x \end{pmatrix} = x \cdot \det\left(xE - A^{G-1}\right) - \det\left(xE - A^{G-1-2}\right)$$

Q_G und χ erfüllen also dieselbe Rekursionsformel. Die Aussage des Lemmas folgt nun durch vollständige Induktion. □

Dieses Lemma lässt sich mithilfe des Pfadbaumes auf beliebige Graphen verallgemeinern, wie in *Godsil and Gutman [1981b]* gezeigt wird. Es gilt das folgende

Lemma 4.2.5
Sei G ein Graph und $v \in G_v$.

Dann gilt:
$\frac{Q_{G-v}}{Q_G} = \frac{Q_{T(G,v)-(v)}}{Q_{T(G,v)}}$
G zusammenhängend $\Longrightarrow \exists T \subseteq T(G,v) : Q_G = \frac{Q_{T(G,v)}}{Q_T}$

Beide Aussagen lassen sich über vollständige Induktion nach der Anzahl der Knoten von G beweisen.

4.2.5. Matchingpolynom eines Pfades

Lemma 4.2.6
Es gilt:
$Q_{P_n}(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right)$

Beweis:
Ein Pfad ist ein Baum und damit insbesondere ein Wald. Daher gilt gemäß Lemma 4.2.4 und aufgrund der Rekursionsformel für U_n:

$$Q_{P_n}(x) = \det\left(xE - A^{P_n}\right) = \det\begin{pmatrix} x & -1 & & & \\ -1 & x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & x & -1 \\ & & & -1 & x \end{pmatrix} \overset{\text{V.I. nach } n}{=} U_n\left(\frac{x}{2}\right) \quad \square$$

Der Kantengraph eines Pfades ist wieder ein Pfad. Es gilt: $L(P_n) \simeq P_{n-1}$. Das soeben bewiesenen Lemma impliziert daher über $P_G^e = P_{L(G)}^v$ und Lemma 4.2.1 für das Unabhängigkeitspolynom eines Pfades das folgende

Korollar 4.2.7
Es gilt:
$P^v_{P_n}(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}}\right)^{n+1} \cdot U_{n+1}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{x}}\right)$

4.2.6. Matchingpolynom eines Kreises

Lemma 4.2.8
Es gilt:
$Q_{C_n}(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$

Beweis:
Sei ab eine Kante von C_n. Dann gilt nach Lemma 4.2.3 und Lemma 4.2.6:

$$Q_{C_n}(x) = Q_{C_n - ab}(x) - Q_{C_n - a - b}(x) = Q_{P_n}(x) - Q_{P_{n-2}}(x) =$$
$$U_n\left(\frac{x}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) \square$$

Der Kantengraph eines Kreises ist wieder ein Kreis. Es gilt: $L(C_n) \simeq C_n$. Aus dem soeben bewiesenen Lemma folgt daher über $P^e_G = P^v_{L(G)}$ und Lemma 4.2.1 für das Unabhängigkeitspolynom eines Kreises das folgende

Korollar 4.2.9
Es gilt:
$P^v_{C_n}(x) = 2\left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}}\right)^n \cdot T_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{x}}\right)$

4.2.7. Matchingpolynom eines vollständigen Graphen

Lemma 4.2.10
Es gilt:
$Q_{K_n}(x) = H_n(x)$

Beweis:
Gilt $n = 0$ oder $n = 1$, so ist die Aussage offensichtlich wahr. Außerdem gilt für einen Knoten a von K_n: $K_n - a \simeq K_{n-1}$. Aus Lemma 4.2.3 folgt daher:

$$Q_{K_n}(x) = xQ_{K_n - a}(x) - \sum_{b \in N^\circ_{K_n}(a)} Q_{K_n - a - b}(x) = xQ_{K_{n-1}}(x) - (n-1)Q_{K_{n-2}}(x)$$

Q_{K_n} und H_n erfüllen also dieselbe Rekursionsformel. Die Aussage des Lemmas folgt nun durch vollständige Induktion. $\square$

4.2.8. Matchingpolynom eines vollständig bipartiten Graphen

Lemma 4.2.11
Es gilt:
$Q_{K_{n,m}}(x) = n!(-1)^n x^{m-n} L_n^{(m-n)}(x^2)$

Beweis:
Die Aussage kann mittels vollständiger Induktion und Lemma 4.2.3 gezeigt werden. Ist A, B die Partition von $K_{n,m}$ mit $\#A = n$ und $\#B = m$, so gilt für einen Knoten a aus A: $K_{n,m} - a \simeq K_{n-1,m}$. Gilt ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $n \leq m$, so folgt daher:

$$
\begin{aligned}
Q_{K_{n,m}}(x) = xQ_{K_{n,m}-a}(x) - \sum_{b \in N^{\circ}_{K_{n,m}}(a)} Q_{K_{n,m}-a-b}(x) = \\
xQ_{K_{n-1,m}}(x) - mQ_{K_{n-1,m-1}}(x) = \\
x^2 Q_{K_{n-2,m}}(x) - 2xmQ_{K_{n-2,m-1}}(x) + m(m-1)Q_{K_{n-2,m-2}}(x) = \ldots = \\
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{m!}{(m-k)!} Q_{K_0,m-k}(x) = \\
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} = \\
n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} x^{n+m-2k} \frac{1}{(n-k)!} = \\
n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{n-k} x^{n+m-2(n-k)} \frac{1}{(n-n+k)!} = \\
n!(-1)^n x^{m-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{n-k} (x^2)^k \frac{1}{k!} = n!(-1)^n x^{m-n} L_n^{(m-n)}(x^2) \; \square
\end{aligned}
$$

4.2.9. Rechenregeln für Unabhängigkeitspolynome

In diesem Unterabschnitt werden einige Rechenregeln für Unabhängigkeitspolynome aufgelistet, welche aus *Levit and Mandrescu [2005]* stammen.

Lemma 4.2.12
Seien G und H disjunkte Graphen und $ab \in G_e$.
Dann gilt:
$P^v_{G \cup H} = P^v_G \cdot P^v_H$
$P^v_G(x) = P^v_{G-a}(x) + xP^v_{G-N_G(a)}(x)$
$P^v_G(x) = P^v_{G-ab}(x) - x^2 P^v_{G-(N_G(a) \cup N_G(b))}(x)$
$P^v_{P_n} = F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{l} x^k$
$P^v_{C_n} = F_{n-1} + 2xF_{n-2}$

Diese Aussagen werden auf ähnliche Weise gezeigt, wie jene aus Lemma 4.2.2, Lemma 4.2.3, Lemma 4.2.6 und Lemma 4.2.8.

4.2.10. Weitere Erkenntnisse über Matchingpolynome

Im Folgenden werden einige neuere Erkenntnisse zusammengefassten, welche in einem mehr oder weniger direkten Zusammenhang zu den Eigenschaften von Matchingpolynomen stehen.

In *Teufl and Wagner [2009]* wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 4.2.13
Seien G ein Graph, $\forall A \subseteq G_v : r(A) := \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \#(G-A)_e{}^{(k)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \#G_e{}^{(k)}}$,
$\forall A \subseteq G_v : \forall B \subseteq G_v : q(A,B) := \frac{r(A \cup B)}{r(A)r(B)}$ und A, B disjunkte Teilmengen von G_v.
Dann gilt:
$\exists \kappa \in \mathbb{R}_{>0} : \exists \lambda \in (0,1) : \frac{1}{1+\kappa\lambda^{d_G(A,B)-1}} \leq q(A,B) \leq 1 + \kappa\lambda^{d_G(A,B)-1}$
und es kann
$\kappa = (1 + \max(\{deg_G(v) | v \in G_v\}))^{\min(\{\#A, \#B\})}$
$\lambda = 1 - \frac{1}{\kappa}$
gewählt werden.

Bewiesen wird der Satz über vollständige Induktion nach dem Abstand von A und B.

$r(A)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Matching von G mit keinem Knoten aus A inzident ist. Demnach kann $q(A,B)$ als der Korrelationskoeffizient der beiden Ereignisse „ein zufällig gewähltes Matching von G ist mit keinem Knoten aus A inzident“ und „ein zufällig gewähltes Matching von G ist mit keinem Knoten aus B inzident“ aufgefasst werden. Die Kernaussage des Satzes ist nun, dass dieser Korrelationskoeffizient nach oben und unten mithilfe positiver Konstanten abgeschätzt werden kann, welche nur von den Kardinalitäten der Mengen A und B und vom „Maximalgrad“ von G abhängen. Sind diese drei Parameter beschränkt, so konvergiert $q(A,B)$ exponentiell gegen 1, wenn der Abstand von A und B gegen unendlich geht.

In *Pippinger [2002]* werden Formeln für die Anzahlen der Matchings der Kantengraphen vollständiger und vollständig bipartiter Graphen hergeleitet:

Satz 4.2.14
Es gilt:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \#(L(K_n))_e{}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{2^k k!}(-1)^k n^{n-2k} \sim \frac{n^n}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \#(L(K_{n,n}))_e{}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k! \binom{n}{k}^2 (n+1)^{2n-2k} \sim \mathrm{e} n^{2n}$$

Der Beweis der ersten Aussage basiert auf der Beobachtung, dass es eine bijektive Abbildung zwischen den Matchings des Kantengraphen eines vollständigen Graphen K_n und der Menge jener Abbildungen $f : V \mapsto K_{nv}$ von einer Teilmenge V der Kantenmenge von K_n in die Kantenmenge selbst gibt, welche keine Fixpunkte oder Paare zueinander inverser Punkte besitzen – für die es also keine Teilmenge $\{v_1, v_2\}$ von V gibt, sodass $f(v_1) = v_2$ und $f(v_2) = v_1$ gilt. Die Menge dieser Abbildungen wird dann mithilfe des Prinzips von Inklusion und Exklusion gezählt.

Die zweite Aussage wird auf ähnliche Weise bewiesen.

In *Liu and Liu [2004]* werden untere Schranken und Formeln für die Anzahlen maximaler Matchings gewisser bipartiter Graphen hergeleitet.

Satz 4.2.15
Seien G ein bipartiter Graph mit Partition $\{A, B\}$,
$\forall \emptyset \neq V \subseteq A : \#N_G^\circ(V) > \#V$ *und* $k_M := \#\{M \text{ Matching von } G | M \text{ maximal}\}$.

Dann gilt:

G *zusammenhängend* $\implies k_M \geq \#G_e + (\#A - 1) \cdot (def(G) - 2)$

$def(G) = 1 \wedge \min(\{deg_G(v) | v \in G_v\}) \geq 2 \implies k_M \geq 2(\#G_e - \#B)$

$def(G) = 1 \implies (k_M = \#G_e - \#A + 1 \iff$
$\forall a \in A : (deg_G(a) \geq 3 \implies \exists b \in N_G^\circ(a) : deg_G(b) = 1))$

$def(G) = 1 \wedge \forall b \in B : deg_G(b) = 2 \implies k_M = 2(\#B + \#\{b \in B | \#C_G \neq \#C_{G-b}\})$

Die recht aufwändigen Beweise der einzelnen Aussagen basieren auf dem Satz von Hall, sowie auf zwei Sätzen aus *Lovász and Plummer [1986]* und *Liu et al. [1999]*. Der erste liefert eine Charakterisierung der Eigenschaft $\forall \emptyset \neq V \subseteq A : \#N_G^\circ(V) > \#V$, welche äquivalent zur Existenz eines Waldes und Teilgraphen F von G mit Knotenmenge G_v ist, für welchen gilt, dass alle Knoten in A den F-Grad 2 haben. Ist umgekehrt G zusammenhängend und hat jeder Knoten in A den G-Grad 2, so besagt der zweite Satz, dass G ein Baum mit Defizit 1 sein und $k_M = \#A + 1$ gelten muss.

5. Matchings und Poker

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten beim Kartenspiel Texas Hold'em Poker und der Anzahl von Matchings fester Kardinalität in bestimmten Graphen beschrieben, die sich aus der jeweiligen Spielsituation ergeben.

5.1. Texas Hold'em Poker

Texas Hold'em ist eine Variante des Kartenspiels Poker, welche mit einem Deck von 52 Karten mit 13 Werten (in aufsteigender Wertigkeit: Die Zahlen von 2 bis 10, sowie Bube, Dame, König und Ass) in jeweils einer von vier gleichwertigen Farben (Pik, Kreuz, Herz und Karo) gespielt wird. Theoretisch ist damit jede Spieleranzahl von 2 bis 23

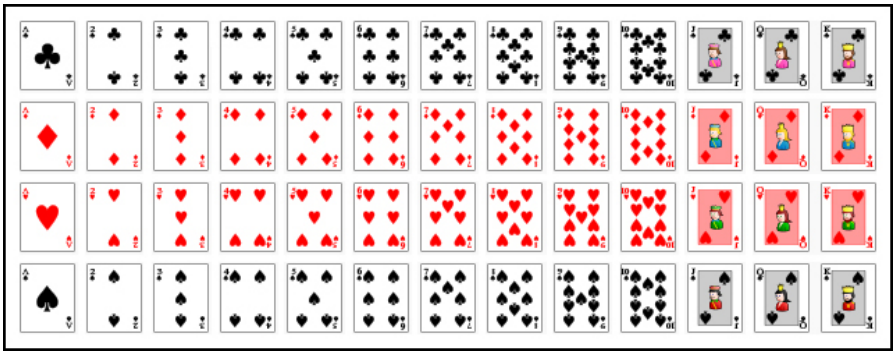


Abbildung 5.1.: Die 52 Karten bei Texas Hold'em Poker (Quelle: Wikipedia)

denkbar, wobei in der Praxis jedoch nur Spiele mit maximal 10 Teilnehmern gespielt werden. Eine sehr gute, vollständige Beschreibung der Regeln (welche etwa auch die Bildung von so genannten Sidepots abdeckt) kann auf Wikipedia im entsprechenden Artikel gefunden werden. Für die Zwecke dieser Arbeit ist allerdings folgende, verkürzte Variante ausreichend: Zu Beginn werden jedem Spieler verdeckt zwei Karten ausgeteilt und im Anschluss bis zu vier Wettrunden – genannt Preflop, Flop, Turn und River – absolviert. Die Spieler sind nacheinander an der Reihe und müssen dabei eine von drei möglichen Entscheidungen treffen.

Passen bedeutet, dass ein Spieler aus dem laufenden Spiel aussteigt und damit seine Ansprüche auf die bisher gezahlten Einsätze – genannt Pot – verliert.

Mitgehen kann ein Spieler, indem er den bisher erbrachten Einsatz der anderen Spieler „hält", also die Differenz des höchsten bisher erbrachten Betrages und des von ihm selbst erbrachten Betrages in den Pot einzahlt. Ist diese Differenz 0, so nennt man das Mitgehen **Schieben**.

Erhöhen bedeutet, dass ein Spieler mehr als den zum Mitgehen notwendigen Betrag in den Pot einzahlt und somit auch alle nachfolgenden Spieler zwingt, einen entsprechend höheren Einsatz zu erbringen (oder zu passen).

Käme ein Spieler in einer Wettrunde zum mindestens zweiten Mal an die Reihe und könnte er in dieser Situation Schieben, so beginnt die nächste Wettrunde. Dabei werden zu Beginn des Flop die ersten drei der fünf so genannten Gemeinschaftskarten vom verbleibenden Kartenstapel genommen und aufgedeckt und zu Beginn des Turn und River die vierte und fünfte. Das Spiel endet, wenn alle bis auf einen Spieler aus dem Spiel ausgestiegen sind (gepasst haben), oder der River zu Ende gespielt wird. Im ersten Fall erhält der im Spiel verbliebene Spieler den Pot; im letzteren werden die beiden Karten aller im Spiel verbliebenen Spieler aufgedeckt und mit diesen, sowie mit den fünf Gemeinschaftskarten der oder die Gewinner bestimmt. Der Pot wird dann zu gleichen Teilen unter den Gewinnern aufgeteilt.

Nun gilt es noch zu klären, wie mithilfe der aufgedeckten Karten die Gewinner gefunden werden. Zuerst wird mit den sieben, einem Spieler zur Verfügung stehenden Karten (die beiden des Spielers, sowie die fünf Gemeinschaftskarten) das so genannten Blatt des Spielers bestimmt, also aus den $\binom{7}{5} = 21$ möglichen Kombinationen von fünf Karten eine jener ausgewählt, welche in der partiellen Liste in Abbildung 5.2 am weitesten unten stehen. Danach werden die Blätter der Spieler verglichen und damit der oder die Gewinner bestimmt.

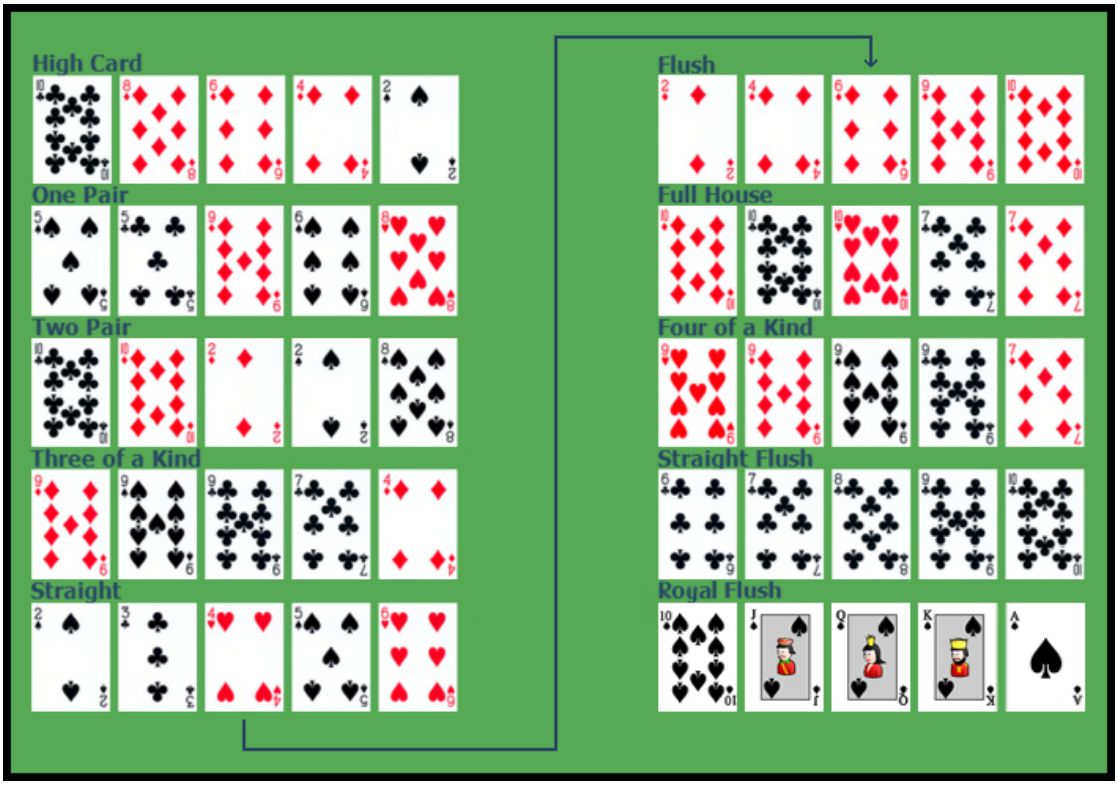


Abbildung 5.2.: Liste einiger Blätter (je eines pro Blatttyp, Quelle: Wikipedia)

5.2. Wahrscheinlichkeiten

Ein Spieler wird seine Entscheidung über Passen, Mitgehen oder Erhöhen – je nach Strategie – basierend auf mehreren Informationen treffen. Den Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen oder mit einem oder mehreren Gegnern unentschieden zu spielen, kommt dabei vermutlich die größte Bedeutung zu. Das Ziel wird es sein, für jede Spieleranzahl von 2 bis 10 Spielern eine vollständige Datenbank anzulegen, welche diese Wahrscheinlichkeiten – die im Folgenden einfach als „die Wahrscheinlichkeiten" bezeichnet werden sollen – für alle möglichen Spielsituationen enthält. Für bis zu 6 Spieler wurde dieses Ziel bereits erreicht und für 7 bis 10 Spieler ist es zumindest in greifbarer Nähe. Der Verfasser schätzt, dass dafür etwa 350000 CPU-Stunden Rechenzeit notwendig wären.

5.3. Spielsituationen

Bevor man sich der eigentlichen Aufgabe des Berechnens der Wahrscheinlichkeiten widmen kann, gilt es erst zu untersuchen, welche und wie viele Spielsituationen es bei Texas Hold'em Poker überhaupt gibt. Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten hat die Spieleranzahl und die Wettrunde, in der man sich befindet, da diese festlegt, wie viele der Gemeinschaftskarten sichtbar sind. Im Preflop kennt man nur die beiden eigenen Karten, im Flop zusätzlich drei der Gemeinschaftskarten, im Turn vier und im River alle fünf. Würde man nun eine Datenbank der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen River haben, so könnten man mit sehr geringem Aufwand auch die Wahrscheinlichkeiten für einen gegebenen Turn bestimmen, indem man die Wahrscheinlichkeiten der 46 möglichen River, die auf den gegebenen Turn folgen können (von insgesamt 52 Karten hat man zwei selbst und vier liegen aufgedeckt als Gemeinschaftskarten vor einem, wodurch für die letzte Gemeinschaftskarte noch 46 Möglichkeiten übrig bleiben), in der Datenbank nachschlägt und addiert (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit). Ebenso einfach lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für einen gegebenen Flop oder Preflop aus den Wahrscheinlichkeiten aller möglichen River berechnen. Daher genügt es, sich auf eine Datenbank aller River zu beschränken, also auf die Werte der folgenden Abbildung:

$$P_n : \{1, \ldots, 52\}^2 \times \{1, \ldots, 52\}^5 \text{ p.v.} \mapsto \mathbb{Q}^{n+1}$$

welche für eine Gegneranzahl $n \in \{1, \ldots, 9\}$ einem 7-Tupel

Eigene Karte 1
Eigene Karte 2
Gemeinschaftskarte 1
Gemeinschaftskarte 2
Gemeinschaftskarte 3
Gemeinschaftskarte 4
Gemeinschaftskarte 5

mit paarweise verschiedenen Einträgen das $(n+1)$-Tupel

Wahrscheinlichkeit zu gewinnen
Wahrscheinlichkeit auf Unentschieden mit einem Gegner
⋮
Wahrscheinlichkeit auf Unentschieden mit n Gegnern

zuordnet. Für jede Spieleranzahl wären also $\frac{52!}{45!} = 674274182400$ mögliche River zu behandeln.

Nun gibt es einige Möglichkeiten, die Zahl der zu untersuchenden River zu reduzieren. Natürlich hat die Reihenfolge der beiden Spielerkarten und der fünf Gemeinschaftskarten keinen Einfluss auf die zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten. Daher reduziert sich die Zahl der wesentlich verschiedenen River zunächst auf $\binom{52}{2} \cdot \binom{50}{5} = 2809475760$. Für die oben definierte Abbildung P_n bedeutet dies, die Wahrscheinlichkeiten bloß für jene 7-Tupel berechnen zu müssen, in denen die ersten beiden und die letzten fünf Koordinaten jeweils echt aufsteigend sind.

Betrachtet man die weiter oben angeführte Liste der Blätter, welche zur Bestimmung des oder der Gewinner verwendet wird (Abbildung 5.2), so erkennt man, dass die Farben der Karten lediglich beim Flush und Straight Flush eine Rolle spielen und sich die restlichen Blätter lediglich über die Kartenwerte definieren. Es ist daher möglich, die Information über die Farben und Werte der Karten durch die folgende Überlegung zu trennen. Die konkrete Farbe, die eine Karte hat, spielt bei der Klassifizierung eines Blattes, dessen Teil sie ist, keine Rolle, sondern bloß das Verhältnis der Farbe (gleich oder ungleich) zu den Farben der anderen Karten im Blatt.
Die Menge

$$\{(F_1, \ldots, F_7) \in \{1,2,3,4\}^7 |\ F_1 = 1 \wedge \forall i \in \{2, \ldots, 7\} : F_i \leq \max(\{F_1, \ldots, F_{i-1}\}) + 1\}$$

$$= \{\ (1,1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,2), (1,1,1,1,1,2,1), (1,1,1,1,1,2,2),$$
$$(1,1,1,1,1,2,3), (1,1,1,1,2,1,1), (1,1,1,1,2,1,2), (1,1,1,1,2,1,3), \ldots\}$$

hat 715 Elemente und diese repräsentieren als „Maske“ genau die Menge all jener Verhältnisse (gleicher Wert in zwei Koordinaten bedeutet gleiche Farbe an den entsprechenden Stellen).
Die Menge

$$\{(W_1, \ldots, W_7) \in \{1, \ldots, 13\}^2 |\ W_1 \leq W_2 \wedge \forall i \in \{3, \ldots, 6\} : W_i \leq W_{i+1} \wedge \forall W \in \{1, \ldots, 13\} : \#\{i \in \{1, \ldots, 7\} | W_i = W\} \leq 4\}$$

$$= \{\ (1,1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,2), (1,1,1,1,1,1,3), (1,1,1,1,1,1,4),$$
$$(1,1,1,1,1,1,5), (1,1,1,1,1,1,6), (1,1,1,1,1,1,7), (1,1,1,1,1,1,8), \ldots\}$$

hat 558883 Elemente und diese bilden genau die Menge aller gültigen Kombinationen von Farbwerten, die in einem River auftreten können (die Kartenwerte 2 bis 10, Bube, Dame, König, Ass entsprechen den Zahlen 1 bis 13). Die ersten beiden Bedingungen

zeichnen dabei eine bestimmte Permutation der beiden Spielerkarten und der fünf Gemeinschaftskarten aus (jene, in denen die Kartenwerte aufsteigend geordnet sind). Die dritte Bedingung verhindert, dass ein Kartenwert öfter als vier Mal auftritt.

Damit reduziert sich die Zahl der zu untersuchenden River weiter, auf $558883 \cdot 715 = 399601345$.

Nicht alle dieser Wert-Farb-Kombinationen repräsentieren einen gültigen River, da in manchen mindestens eine Karte mehrfach vorkommt. Außerdem genügt es, sich bei einer gegebenen Wert-Kombinationen mit einer oder mehreren Gruppen identischer Werte in den Bereichen der Spieler- oder Gemeinschaftskarten, auf jene Farb-Masken zu beschränken, welche in den zugehörigen Bereichen der identischen Werte jeweils (streng) monoton wachsen, da die entsprechenden Karten ohnehin verschiedene Farben haben müssen und daher die Notwendigkeit innerer Vergleichbarkeit in diesen Bereichen wegfällt. Die Bedingung der Monotonie (welche im Fall eines gültigen River nur streng sein kann) zeichnet dabei eine Farb-Maske aus.

Zählt man die verbleibenden Kombinationen – also nur jene, welche die soeben genannten Bedingungen erfüllen – so kommt man auf 157506622. An dieser Stelle enden die grundlegenden Überlegungen, welche die Anzahl der wesentlich verschiedenen River reduzieren, und die graphentheoretischen setzen an.

5.4. Zusammenhang mit Matchings

Um nun die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für die verbleibenden River zu berechnen, definiert man die folgenden Graphen mit zugehörigen Kantenfärbungen, welche eine weitere, drastische Reduktion der zu untersuchenden River erlauben werden. Mit zwei Karten in der eigenen Hand und fünf Karten als Gemeinschaftskarten in der Mitte, verbleiben 45 Karten, welche sich in Gruppen von zwei auf die n Gegner verteilen. Jeder der Gegner hält also eine von $\binom{45}{2} = 990$ Kombinationen der verbleibenden 45 Karten. Manche dieser Kombinationen werden in Verbindung mit den fünf Gemeinschaftskarten ein stärkeres als das eigene Blatt bilden, andere werden gleich stark und der Rest schwächer sein. Betrachtet man nun jede der 45 verbleibenden Karten als Knoten im vollständigen Graphen, so repräsentieren die 990 Kanten genau diese Kombinationen und man kann sie entsprechend ihres Verhältnisses zu den eigenen beiden Karten färben. Abbildung 5.3 zeigt ein Beispiel eines Rivers und den zugehörigen kantengefärbten Graphen, wobei man gegen die von roten (1) Kanten repräsentierten Kombinationen gewinnt, gegen blaue (2) unentschieden spielt und gegen grüne (3) verliert.

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, bedeutet nun K-Matchings in diesem Graphen zu zählen. Denn um etwa gegen n Gegner zu gewinnen, müssen deren Karten je eine der roten Kanten im Graphen bilden. Allerdings dürfen keine zwei dieser Kanten adjazent sein, da sonst eine Karte mehrfach vorkommen würde. Die Menge der „günstigen Fälle“, also aller möglichen Zuordnung der 45 Karten auf die n Gegner bei denen man gewinnen würde, entspricht daher genau der Menge der n-Matchings des rot-gefärbten Teilgraphen.

Um gegen $k \leq n$ Gegner unentschieden zu spielen, müssen die Karten von k Gegnern blaue Kanten bilden und die der restlichen $n-k$ Gegner rote. Natürlich gilt ebenfalls, dass keine zwei dieser Kanten adjazent sein dürfen. Die Menge der in diesem Fall „günstigen Fälle“, also aller möglichen Zuordnungen der 45 Karten auf n Gegner bei denen man

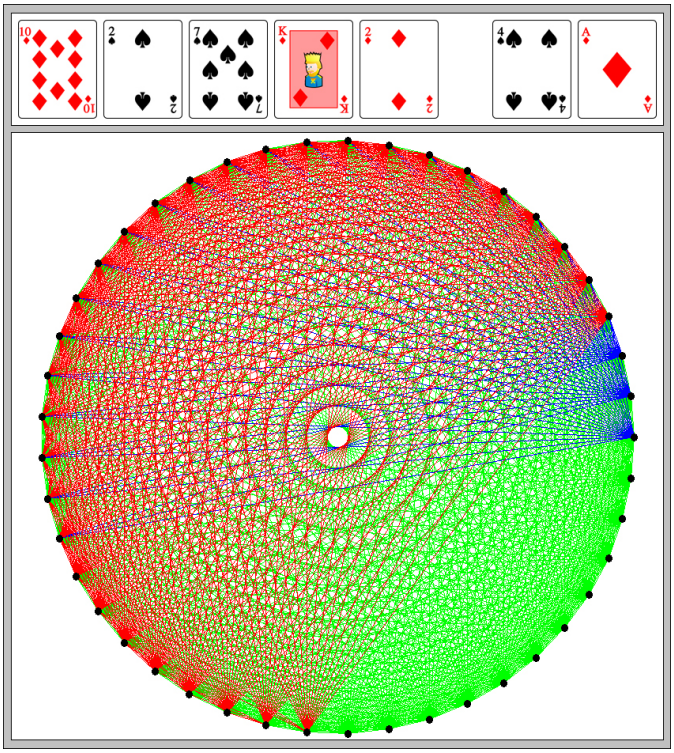


Abbildung 5.3.: Beispiel eines Rivers

gegen k dieser Gegner unentschieden spielen würde, entspricht daher genau der Menge der $(n-k,k)$-Matchings des rot- und blau-gefärbten Teilgraphen.

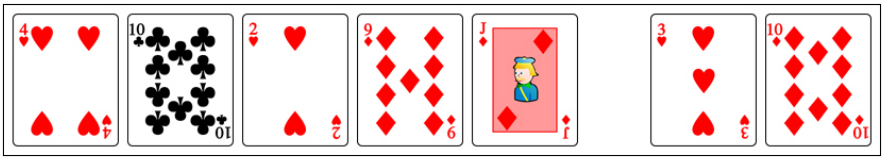
Da „Gewinnen“ auch als „gegen 0 Spieler unentschieden spielen“ aufgefasst werden kann, entspricht die Aufgabe des Berechnens der gesuchten Wahrscheinlichkeiten zusammengefasst dem folgenden graphentheoretischen Problem: Für jeden der im letzten Abschnitt 157506622 übrig gebliebenen River jenen kantengefärbten Graphen zu bestimmen, welcher in der oben definierten Weise das Verhältnis der eigenen Karten zu allen möglichen Kombinationen von 2 Karten aus den verbliebenen 45 beschreibt und in diesem dann für jedes $n \in \{1,\dots,9\}$ und jedes $k \in \{0,\dots,n\}$ die Anzahl der $(n-k,k)$-Matchings des rot- und blau-gefärbten Teilgraphen berechnen, also die Koeffizienten von x_1, $x_1 \cdot x_2$, ${x_1}^2$, ${x_1}^2 \cdot x_2$, ${x_1}^2 \cdot {x_2}^2$, …, ${x_1}^9 \cdot {x_2}^9$ des Matchingpolynoms.

Nun ist es so, dass zwei isomorphe Graphen natürlich identische Matchingpolynome haben. Daher ließe sich die Zahl der zu behandelnden River reduzieren, indem man zuvor – im Sinne von Isomorphie – mehrfach vorkommende Graphen eliminiert. Allerdings ist zwei Graphen auf Isomorphie zu testen im Allgemeinen aufwändig (siehe dazu: *Schöning [1988]*). Theoretisch müsste man dazu für jede mögliche Permutation der Knoten eines der beiden Graphen überprüfen, ob die beiden Graphen nach Anwendung der Permutation übereinstimmen (unter der Bedingung, dass die Knotenmengen der Graphen bei 1 beginnenden Intervallen natürlicher Zahlen entsprechen, wie es gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf). Glücklicherweise gelingt es im speziellen Fall der „River-Graphen“, sehr viele dieser Permutationen auf folgende Weise aufzufinden. Was für eine solche Permutation nämlich in

jedem Fall gelten muss, ist, dass nach ihrer Anwendung die Grade gleicher Knoten in beiden Graphen übereinstimmen müssen. Man kann also die Knoten beider Graphen so permutieren, dass ihre Grade monoton fallend sind und hoffen, dass damit schon passende Permutationen gefunden sind. Natürlich ist im Fall der River-Graphen nicht der Grad innerhalb des gesamten Graphen zu verwenden, sondern innerhalb des rot-, blau- oder grün-gefärbte Teilgraphen. Dabei gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge man die Grade innerhalb der drei Teilgraphen berücksichtigt und nach ihnen sortiert. Außerdem genügt es, bei jeder dieser Möglichkeiten nur innerhalb der jeweils ersten beiden Teilgraphen zu sortieren und auch nur diese zu vergleichen, da der jeweils dritte über die anderen beiden eindeutig festgelegt ist (als relatives Komplement innerhalb des vollständigen Graphen mit 45 Knoten). Stimmen zwei River-Graphen in einer dieser sechs Repräsentationen überein, so sind sie isomorph und haben daher identische Matchingpolynome.

Verwendet man diese Methode, um isomorphe River-Graphen auszusortieren (sogar die meisten, siehe dazu: Unterabschnitt 6.1.5), so reduziert sich deren Zahl auf 151215. Dieser Reduktionsschritt ist also sehr ergiebig, aber auch aufwändig, da jeder der ursprünglich 157506622 Graphen mit jedem anderen verglichen werden muss. Natürlich muss dabei nicht immer auf die genannten sechs Repräsentationen zurückgegriffen werden, da zwei dieser Graphen nur dann isomorph sein können, wenn ihre rot-, blau- und grüngefärbten Teilgraphen gleich groß sind (gleich viele Kanten haben). Dennoch dauerte der gesamte Vorgang mit der im Unterabschnitt 6.1.5 beschriebenen Hardware ungefähr sechs Wochen.

Abbildung 5.4 fasst nun alle angewendeten Reduktionsschritte zusammen.



Unter Beachtung der Reihenfolge:
$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = \underline{674274182400}$

Ohne Beachtung der Reihenfolge:
$\binom{52}{5} \cdot \binom{47}{2} = \underline{2809475760}$

Trennung von Kartenwert und Kartenfarbe:
$558883 \cdot 715 = \underline{399601345}$

Gültige Wert- und Farbkombinationen:
$\underline{157506622}$

Reduktion auf
$\underline{\underline{151215}}$ Isomorphietypen

Abbildung 5.4.: Reduktion der zu untersuchenden River

6. Algorithmen

In diesem Kapitel werden zwei Algorithmen beschrieben, mit welchen die Anzahl der k-Matchings, beziehungsweise das gesamte Matchingpolynom eines gegebenen Graphen berechnet werden kann. Der als erstes vorgestellte Algorithmus ist im Rahmen des Problems der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei Texas Hold'em Poker entstanden, deren Zusammenhang zur Theorie der Matchings in Kapitel 5 beschrieben wurde. Er kann auf beliebige kantengefärbte Graphen angewendet werden und berechnet für diese und ein gegebenes Tupel nicht-negativer, ganzer Zahlen K die Anzahl der K-Matchings. Mit dem zweiten Algorithmus kann das Unabhängigkeitspolynom als Ganzes berechnet werden und damit – über den Umweg des Kantengraphen – auch das Matchingpolynom.

6.1. Ein Algorithmus

Der folgende Algorithmus macht sich Ähnlichkeiten „innerer Strukturen“ – welche sich als bipartite Teilgraphen herausstellen werden – innerhalb eines Graphen und über mehrerer Graphen hinweg zunutze macht, um die Rechenzeit zu reduzieren. Ausgangspunkt sind also ein oder mehrere kantengefärbte Graphen, für die es für gewisse Tupel nicht-negativer, ganzer Zahlen K, die Anzahl der K-Matchings zu bestimmen gilt. Dabei kommen alle drei Hauptressourcen moderner Computer zum Einsatz, nämlich

- Rechenleistung
- Größe des Arbeitsspeichers
- Festplattenkapazität

in dem Sinn, dass ein Mehr an einem dieser drei Ressourcen unter gewissen Voraussetzungen ein Weniger an Rechenzeit bedeutet. Außerdem sind die rechenaufwändigsten Schritte des Algorithmus praktisch beliebig parallelisierbar, wodurch er für die Anwendung in Supercomputern geeignet ist. Der Algorithmus fand erfolgreiche Anwendung bei der Berechnung der in Kapitel 5 beschriebenen Wahrscheinlichkeiten bei Texas Hold'em Poker für bis zu sechs Spieler. Teile des Ergebnisses werden im Anschluss an die Beschreibung des Algorithmus präsentiert. Die vollständige Datenbank aller errechneten Wahrscheinlichkeiten kann auf der beigelegten DVD gefunden werden. Außerdem werden einige offene Fragen und mögliche Verbesserungen des Algorithmus angesprochen.

6.1.1. Theoretische Einordnung

Der Algorithmus beruht im Wesentlichen auf einer Verallgemeinerung der in *Aigner [1984, S. 138]* bewiesenen Tatsache, dass die Anzahl perfekter Matchings eines bipartiten Graphen G mit quadratischer Biadjazenzmatrix B, gleich der Permanente seiner Biadjazenzmatrix ist, also:

$$\#G_e{}^{\left(\frac{\#G_v}{2}\right)} = perm(B)$$

Wie sich in der nachfolgenden Beschreibung des Algorithmus zeigen wird, gilt nämlich für beliebige Graphen G, sowie eine beliebige nicht-negative, ganze Zahl k:

$$\#G_e{}^{(k)} = \sum_{I \in \{1,\ldots,m^G\}^k\uparrow} perm\left(R_I^G\right)$$

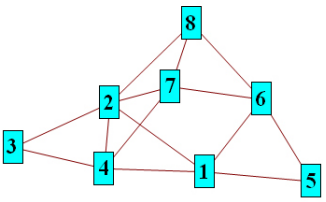
Das Zählen der k-Matchings von G wird also zurückgeführt auf das Zählen bezüglich eines bestimmten Teiles der Partition quasiperfekter Matchings gewisser bipartiter Teilgraphen von G. Mithilfe dieser Teilgraphen ausgedrückt, gilt (sofern die Knotenmenge des Graphen eine Teilmenge der natürlichen Zahlen bildet, wie es gemäß der Bemerkung nach Definition 4 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf) für die Anzahl der k-Matchings:

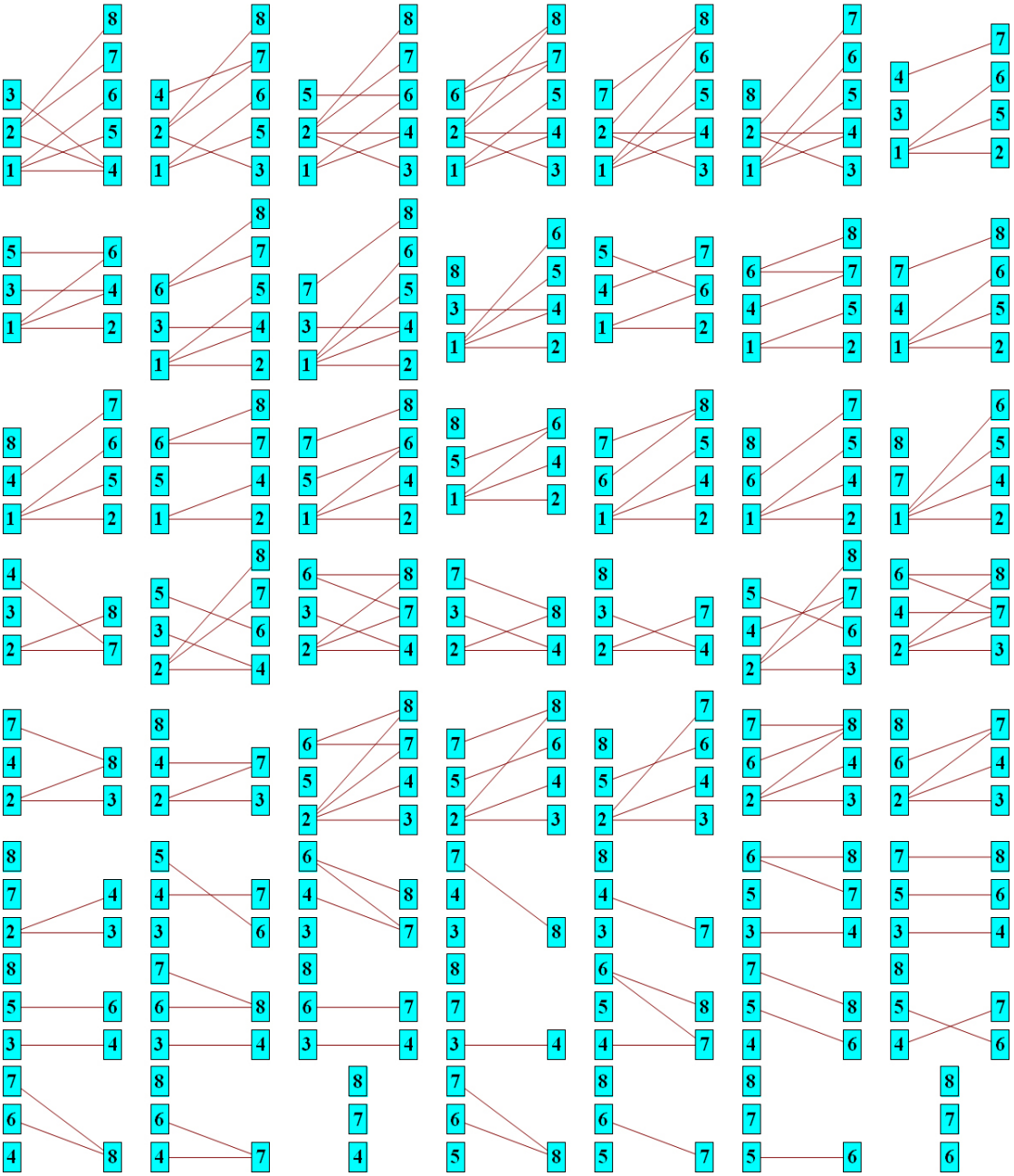
$$\#G_e{}^{(k)} = \sum_{I \in {G_v}^k\uparrow} perm\left(B^{\overline{N_G}^+(I),I}\right)$$

Es gilt also der folgende

Satz 6.1.1
Seien G ein Graph mit $G_v \subset \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$.
Dann gilt:
$\#G_e{}^{(k)} = \sum_{I \in {G_v}^k\uparrow} perm\left(B^{\overline{N_G}^+(I),I}\right) = \sum_{I \in \{1,\ldots,m^G\}^k\uparrow} perm\left(R_I^G\right)$
Insbesondere kann also jeder Graph G als Vereinigung von $n = \binom{G_v}{k}$ bipartiten Teilgraphen $G_1, \ldots, G_n$ mit Partitionen $\{A_1, B_1\}, \ldots, \{A_n, B_n\}$ geschrieben werden, sodass $\#G_e{}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} perm\left(B^{G_i,A_i}\right)$ *gilt.*

Die folgende Abbildung zeigt eine derartige Zerlegung für $k = 3$:


8
7
2
6
3
4
1
5



6.1.2. Vorbereitung der Graphen

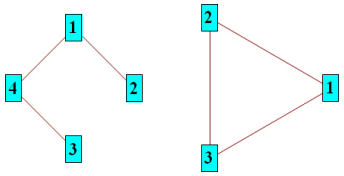
Bei ungefärbten Graphen

Bevor der Algorithmus angewendet werden kann, müssen die Graphen in Form der reduzierten Adjazenzdarstellung vorliegen. Diese legt – zumindest im Fall von Graphen ohne isolierte Knoten (welche beim Zählen von Matchings keine Rolle spielen) – den Graphen eindeutig (bis auf Isomorphie) fest, was leicht durch die Rekonstruierbarkeit einer Adjazenzmatix gesehen werden kann. Das folgende Beispiel verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dass die Darstellung durch die reduzierte Adjazenzmatrix alleine (ohne zugehörige Positionsvektoren) nicht nur nicht (bis auf Isomorphie) eindeutig ist, sondern auch die Zahl der k-Matchings zweier Graphen mit identischen, reduzierten Adjazenzmatrizen verschieden sein kann, zeigt das folgende einfache Beispiel:



Linker Graph:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechter Graph:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich besitzt der erste Graph ein 2-Matching, wohingegen der zweite kein solches besitzt. Dennoch stimmen die reduzierten Adjazenzmatrizen der beiden Graphen überein und die unterschiedliche Anzahl an k-Matchings ist alleine in den reduzierten Positionsvektoren kodiert.

Während die Zahl der Zeilen (und Spalten) der Adjazenzmatrix stets der Zahl der Knoten des Graphen entspricht, sind die Abmessungen der reduzierten Adjazenzmatrix und auch die Zahl ihrer Einträge stark von der Wahl des Repräsentanten innerhalb der Isomorphieklasse des Graphen abhängig, wie das folgende Beispiel zeigt:



Linker Graph:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechter Graph:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie sich später herausstellen wird, ist es für den Algorithmus vorteilhaft, wenn die Zahl der Spalten der reduzierten Adjazenzmatrix möglichst gering ist. Im obigen Beispiel wäre also die erste Benennung der Knoten des Graphen die geeignetere.

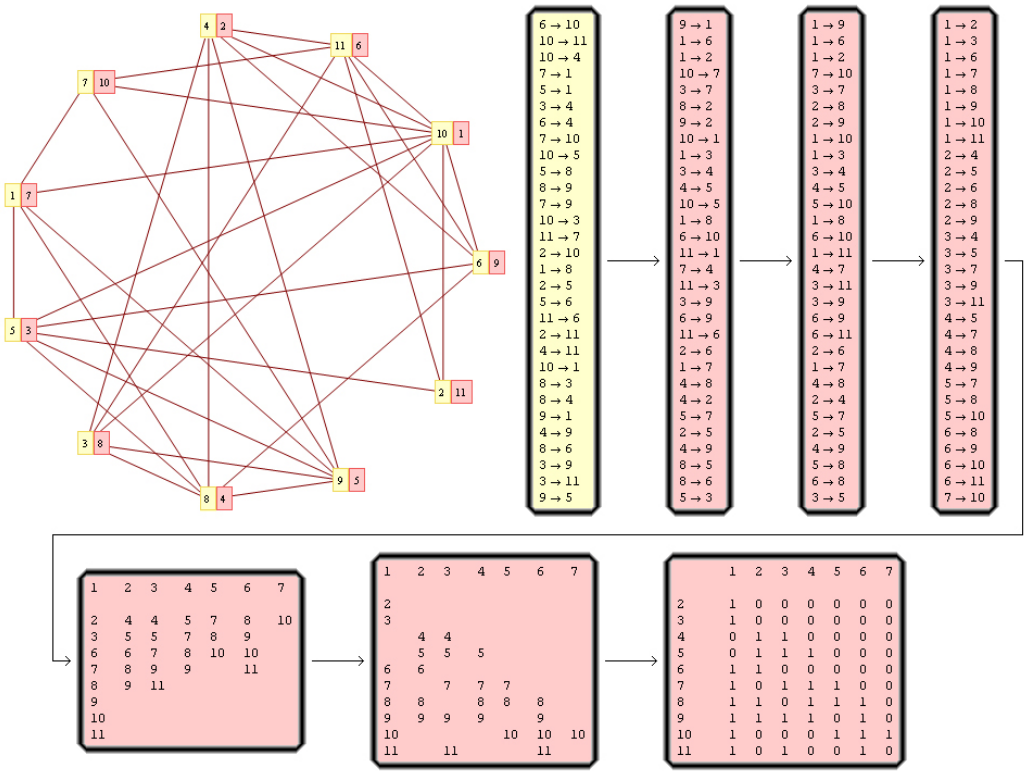
Was unterscheidet nun die beiden Möglichkeiten? Da die Adjazenzmatrix der in dieser Arbeit vorkommenden (ungerichteten) Graphen in jedem Fall symmetrisch ist, lassen

sich beim „Reduzieren“ der Adjazenzmatrix offensichtlich mehr Spalten streichen, wenn die „1“en unterhalb der Hauptdiagonale möglichst weit links stehen und möglichst viele der rechten Spalten unterhalb der Hauptdiagonale „leer“ bleiben (keine „1“en enthalten), wie das obige Beispiel verdeutlicht. Dies ist nun dann der Fall, wenn die Knoten mit niedrigerer Nummer einen möglichst hohen Grad haben. Eine einfache Möglichkeit eine günstige (wenn auch vielleicht nicht die beste) Repräsentation zu finden ist also, die Knoten nach fallendem Grad zu ordnen. Im obigen Beispiel erfüllt der erste Graph diese Bedingung, während im zweiten der Knoten mit dem höchsten Grad auch die höchste Nummer – nämlich 7 – hat.

Zusammengefasst kann die Vorbereitung der Graphen folgendermaßen beschrieben werden:

- Umbenennen der Knoten nach fallendem Grad
- Bestimmung der reduzierten Adjazenzdarstellung

Das folgende Diagramm zeigt eine Möglichkeit, wie dies in einem Programm realisiert werden könnte, sofern der Graph in Form einer Liste von 2-Tupeln natürlicher Zahlen vorliegt, welche die Kanten des Graphen beschreibt (also ein $2 \times Kantenanzahl$-Array, wobei n der Zahl der Kanten entspricht).



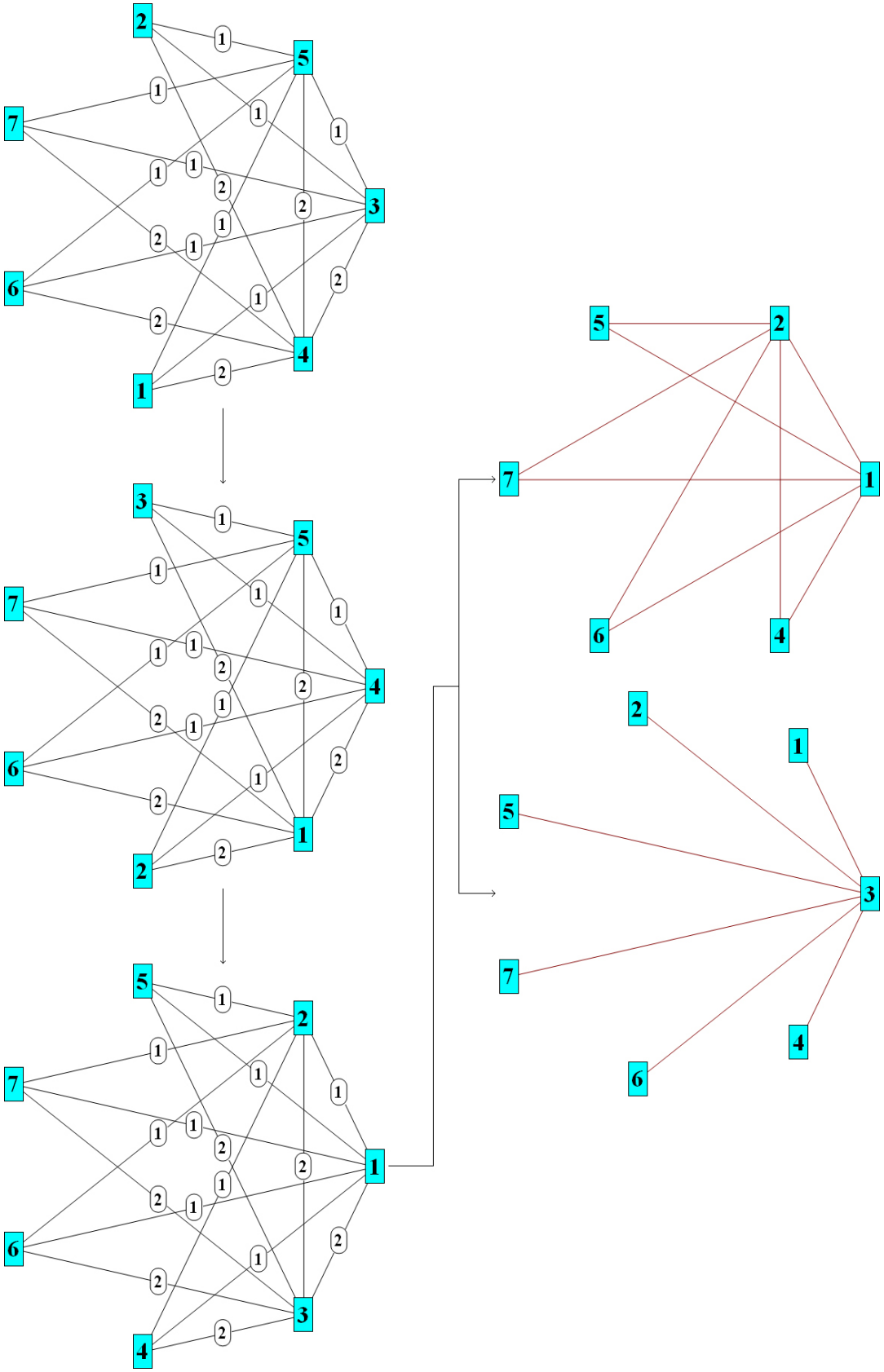
Im ersten Schritt werden die Einträge der Tupel derart umbenannt, dass ihre Häufigkeit innerhalb der Liste mit steigendem Wert geringer wird. Danach wird jedes Tupel (welches zwar eine ungerichtete Kante repräsentiert, im Computer jedoch als geordnetes Paar der

beiden inzidenten Knoten vorliegt) so sortiert, dass der erste Eintrag der kleinere ist. Anschließend wird die gesamte Liste aufsteigend lexikographisch sortiert und mit dieser dann die gesuchte reduzierte Adjanzenzmatrix und die zugehörigen Positionsvektoren gebildet.

Bei kantengefärbten Graphen

Im Fall kantengefärbter Graphen, führt man die oben genannten Schritte für jede Farbe und den so gefärbten Teilgraphen durch. Man sortiert also zuerst die Knoten eines jeden derartigen Teilgraphen nach fallendem Grad und stellt dann die reduzierte Adjazenzdarstellung des Teilgraphen auf. Da die Knotenmengen dieser Teilgraphen im Allgemeinen natürlich nicht disjunkt sein müssen, kann die im ersten Schritt notwendige Umbenennung der Knoten in einem Teilgraphen, auch zu einer Umbenennung der Knoten eines oder mehrerer anderer Teilgraphen führen. Je stärker die einzelnen Teilgraphen untereinander verbunden sind, desto größer können diese gegenseitigen Beeinflussungen sein und im Falle von paarweise disjunkten Teilgraphen gar nicht vorhanden. Die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Teilgraphen behandelt werden, beeinflusst nun das Ergebnis, wobei der als letztes behandelte Graph in jedem Fall einer jener sein wird, deren Knoten am Ende des gesamten Sortiervorgangs auch tatsächlich nach fallendem Grad benannt sind, während dies bei anderen nur teilweise oder gar nicht zutreffen wird. Wie auch im ungefärbten Fall, profitiert der Algorithmus davon, wenn die Zahl der Spalten der einzelnen reduzierten Adjazenzmatrizen möglichst gering ist, wobei dem bei den größeren Graphen auch eine größere Bedeutung zukommt.

Daher drängt es sich auf, die einzelnen Teilgraphen nach steigender Größe (also Zahl der Kanten) zu behandeln, um auf einfache Weise eine günstige (wenn auch vielleicht nicht die beste) Repräsentation der gefärbten Graphen zu finden. Das folgende Beispiel veranschaulicht die beschriebene Methode:


2
5
7
3
6
4
1
3
5
7
4
6
1
2
5
2
1
7
5
3
7
4
6
5
2
7
1
6
4

Oberer Graph (rechts):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Unterer Graph (rechts):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der mit 2 gefärbte Teilgraph stellt den kleineren (bezüglich Kantenzahl) der beiden Teilgraphen dar. Somit werden die Knoten zuerst bezüglich der Ordnung innerhalb dieses Teilgraphen absteigend sortiert, und anschließend bezüglich des mit 1 gefärbten. Danach werden die reduzierten Adjazenzdarstellungen gebildet.

Dieser Anwendungsfall der reduzierten Adjazenzmatrix ist auch der Grund, warum in deren Definition (24) bloß vorausgesetzt wird, dass die Knotenmenge eine Teilmenge der natürlichen Zahlen bildet, und nicht wie bei der „gewöhnlichen“ Adjazenzmatrix (Definition 23) ein bei 1 beginnendes Intervall. Letzteres kann nämlich nach der Umbenennung der Knoten gemäß der Ordnung innerhalb eines Teilgraphen, für einen anderen Teilgraphen nicht mehr vorausgesetzt werden. Da die durch die nicht gestrichenen Zeilen und Spalten der reduzierten Adjazenzmatrix repräsentierten Knoten ohnehin in den reduzierten Positionsvektoren gespeichert werden müssen, um eine eindeutige Beschreibung der Isomorphieklasse des Graphen zu erhalten (oder auch nur der Anzahl seiner k-Matchings, wie das Beispiel auf Seite 48 zeigt, in welchem die Knoten sogar wie für die gewöhnliche Adjazenzmatrix gefordert vorliegen), bedeutet dies jedoch keinen Mehraufwand.

6.1.3. Auffinden innerer Ähnlichkeiten

Nun, da alle Graphen wie für den Algorithmus notwendig und vorteilhaft vorliegen, geht es im nächsten Schritt darum, „innere Ähnlichkeiten“ innerhalb eines Graphen, oder über mehrere hinweg, auszunutzen, um Rechenzeit zu sparen (siehe Unterabschnitt 6.1.1). Zuvor folgt jedoch eine prinzipielle Beschreibung der Methode, mit der es gelingt, aus der soeben beschriebenen reduzierten Adjazenzdarstellung eines kantengefärbten Graphen, die Zahl seiner K-Matchings herauszulesen. Zur Anwendung kommt dabei die verallgemeinerte Permanente, welche auch für nicht-quadratische Matrizen definiert werden kann. Diese zählt für eine binäre Matrix – gemäß der Bemerkung nach Definition 42 –

die Anzahl der Möglichkeiten, in jeder Spalte genau eine „1“ auszuwählen, sodass keine zwei in derselben Zeile stehen.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist ein kantengefärbter Graph G mit n Farben, welcher in der oben beschriebenen Weise in Form der reduzierten Adjazenzdarstellung vorliegt und ein Tupel nicht-negativer, ganzer Zahlen $K = (k_1, \ldots, k_n)$ mit Summe $N := \sum_{i=1}^{n} k_i$. Das Ziel ist es, die Anzahl der K-Matchings von G zu bestimmen. Die nächstliegende Möglichkeit ist wohl, für jede Auswahl von N Kanten aus der Kantenmenge von G zu überprüfen, ob es sich um ein K-Matching handelt. Dazu müssen zwei Bedingungen erfüllt sein, nämlich:

- Die gewählten Kanten bilden ein Matching, also keine zwei sind adjazent
- Für jedes i in $\{1, \ldots, n\}$ haben genau k_i der gewählten Kanten die Farbe i

Die Menge aller möglichen Auswahlen von N Kanten des Graphen entspricht nun genau der Menge aller Möglichkeiten, aus den Adjazenzmatrizen der einzelnen Teilgraphen insgesamt N „1“en auszuwählen, da durch die Art der Bildung der reduzierten Adjazenzmatrix aus der gewöhnlichen Adjazenzmatrix (0-setzen aller Einträge oberhalb der Hauptdiagonale) jede „1“ für genau eine Kante des Graphen steht. Die beiden oben genannten Bedingungen übersetzen sich nun wie folgt:

Da in der reduzierten Adjazenzdarstellung kantengefärbter Graphen für jeden in einer Farbe gefärbten Teilgraphen eine eigene reduzierte Adjazenzmatrix angelegt wird, bedeutet die zweite Bedingung, dass für jedes i in $\{1, \ldots, n\}$ genau k_i der gewählten „1“en aus der reduzierten Adjazenzmatrix des mit i gefärbten Teilgraphen stammen müssen.

Es bleibt also nur noch die erste Bedingung zu überprüfen, also die Frage zu beantworten, was es für eine beliebige Auswahl von N „1“en bedeutet, ein Matching zu repräsentieren. Offensichtlich darf weder der Zeilen- noch der Spaltenknoten einer „1“ – die ja genau die zur gewählten Kante inzidenten Knoten sind – mit dem Zeilen- oder Spaltenknoten einer anderen „1“ übereinstimmen. Daraus folgt insbesondere, dass innerhalb der reduzierten Adjazenzmatrix eines Teilgraphen nie zwei „1“en in einer Zeile oder Spalte stehen dürfen und daraus wiederum, dass die gewählten N „1“en auch in genau N verschiedenen Spalten aller n reduzierten Adjazenzmatrizen stehen müssen.

Mit diesen Bedingungen lässt sich nun eine günstige Vorgehensweise beim Wählen der „1“en ableiten:

1. Wähle N Spalten der n reduzierten Adjazenzmatrizen derart, dass einerseits für jedes i in $\{1, \ldots, n\}$ genau k_i der Spalten aus der reduzierten Adjazenzmatrix des mit i gefärbten Teilgraphen stammen, und andererseits kein Spaltenknoten doppelt vorkommt.

2. Bringe alle gewählten Spaltenvektoren durch Ergänzen fehlender Einträge mit „0“ derart auf eine (minimale) gemeinsame Länge, dass Einträge mit gleichem Zeilenknoten „in einer Höhe“ stehen.

3. Bilde mit den nun gleichlangen Spaltenvektoren eine Matrix (nebeneinander schreiben) und streiche in dieser alle Zeilen, deren Zeilenknoten mit dem Spaltenknoten einer Spalte übereinstimmt, sowie alle Nullzeilen.

4. Berechne die verallgemeinerte Permanente der so gebildeten Matrix und addiere diese zur Gesamtzahl der K-Matchings.

5. Beginne von vorne, bis jede nach Schritt 1 zulässige Auswahl von N Spalten der n reduzierten Adjazenzmatrizen genau ein Mal getroffen wurde.

An dieser Stelle ist auch erkennbar, warum der Algorithmus von einer möglichst kleinen Spaltenzahl der reduzierten Adjazenzmatrizen profitiert. Bei einer Gesamtzahl von $M := \sum_{i=1}^{n} m^{G_{f_G,i}}$ Spalten müssen die genannten Schritte im schlimmsten Fall $\binom{M}{N}$ Mal ausgeführt werden.

Auf Schritt 4 – das Berechnen der verallgemeinerten Permanenten – wird im Allgemeinen die meiste Rechenzeit entfallen. Daher setzt an dieser Stelle das Auffinden und Ausnutzen innerer Ähnlichkeiten an. Gemäß der Bemerkung nach Definition 42, ist die verallgemeinerte Permanente einer binären Matrix invariant unter Zeilen- oder Spaltenvertauschungen. Diese Eigenschaft kann zur Definition einer Äquivalenzrelation auf der Menge aller binären Matrizen verwendet werden, welche mit der verallgemeinerten Permanente verträglich ist. Dabei heißen zwei binäre Matrizen A und B äquivalent, wenn sie identische Abmessungen haben und B aus A durch Vertauschen der Zeilen und Spalten gebildet werden kann.

Eine einfach zu bestimmende, kanonische Form zu definieren, gestaltet sich als schwierig. Jedoch gibt es eine wenig aufwändige Methode, um zumindest sehr viele äquivalente Matrizen zu erkennen: Man sortiert die Zeilen und Spalten so lange abwechselnd lexikographisch, bis sich an deren Reihenfolge nichts mehr ändert, also sowohl die Zeilen als auch die Spalten lexikographisch geordnet sind (lexikographisch in dem Sinn, dass eine Zeile oder Spalte als Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$ aufgefasst wird und das Zeichen 1 vor dem Zeichen 0 kommt). Dieser Fall tritt immer nach endlich vielen Schritten ein und es muss keine zusätzliche Abbruchbedingung festgelegt werden, wie die folgende Überlegung zeigt: Werden die Zeilen der Matrix lexikographisch geordnet, so besteht die erste Spalte bis zu einer gewissen Stelle aus „1“en und ab dort aus „0“en. Sortiert man nun die Spalten lexikographisch, so bleiben die „1“en der ersten Spalte in jedem Fall erhalten und die möglicherweise zusätzlich gewonnenen werden nach erneutem Sortieren der Zeilen zu den bereits vorhandenen geschoben. Mit jedem weiteren Sortieren nach den Spalten und Zeilen wächst also in der ersten Spalte lediglich die Anzahl der „1“en, bis diese schließlich ein Maximum erreicht. Ab nun gibt es keine Spalte, welche zu Beginn gleich viele „1“en eingetragen hat und dazu noch weitere, da sonst diese nach erneutem Sortieren nach den Spalten und Zeilen an die Stelle der ersten treten würde und somit ein neues Maximum gefunden wäre. Von nun an findet Zeilenvertauschung nur noch jeweils innerhalb der Bereiche der „1“en und „0“en der ersten Spalte statt – es entstehen also zwei „geschlossene Bereiche“. Die zweite Spalte wird nun ebenfalls nach endlich vielen Schritten fixiert, wobei sich in jedem der geschlossenen Bereiche wiederum eine Zweiteilung einstellen wird (eine Reihe von „1“en gefolgt von „0“en). Dabei entstehen bis zu vier geschlossene Bereiche, je einer für jede auftretende Kombination von „1“en und „0“en in den ersten beiden Spalten. Mit vollständiger Induktion folgt nun, dass die Spalten nacheinander fixiert werden und immer neue geschlossene Bereiche entstehen, bis schlussendlich die gesamte Matrix sowohl nach den Zeilen, als auch nach den Spalten lexikographisch geordnet ist.

Im Anschluss an den Sortiervorgang werden mehrfach auftretende Zeilen zusammengefasst, die Vielfachheiten in einem separaten Vektor notiert und das Ergebnis in eine Datenbank einsortiert. Die resultierende Matrix dient dabei als erster, und der zugehörige Vektor als zweiter Schlüssel.

Im folgenden Beispiel kommt die beschriebene Vorgehensweise für eine Auswahl der Spalten zur Anwendung:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\end{pmatrix}\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&1&1&0\\1&1&1&1&0&1&0\\1&0&0&0&1&1&1\\1&0&1&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\end{pmatrix}\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&4&6&7\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2\\3\\5\\8\\9\\10\\11\end{pmatrix}\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&4&6&7\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

6.1.4. Berechnung der verallgemeinerten Permanenten

Im letzten Schritt des Algorithmus muss die im vorigen Unterabschnitt gebildete Datenbank noch ausgewertet werden. Dazu bietet es sich an, den ersten Schlüssel (die Matrix mit paarweise verschiedenen Zeilen) zu verwenden, um die verallgemeinerte Permanente in Abhängigkeit des zweiten Schlüssels (die Vielfachheiten der einzelnen Zeilen) auszudrücken. Bezeichnet $A = (A_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}}$ die Matrix und $b = (b_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ den zugehörigen Vektor der Vielfachheiten, so erfüllt das folgende Polynom diesen Zweck:

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,m\}^n}\prod_{j=1}^{n} A_{i_j,j}\cdot(b_{i_j}-\#\{j'\in\{1,\dots,j-1\}|i_{j'}=i_j\})$$

Da das Produkt genau dann nicht 0 ist, wenn alle, bei der Summe gewählten $A_{i_j,j}$ gleich 1 sind, kann das Polynom auch auf eine andere Weise geschrieben werden, welche eine effizientere Implementation erlaubt. Es ergibt sich das folgende

Lemma 6.1.2
Seien $A = (A_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} \in \{0,1\}^{n\times m}$, $b = (b_i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in {\mathbb{N}_0}^n$ und B jene Matrix, die entsteht, wenn man jede Zeile von A entsprechend der mit b gegebenen Vielfachheit anschreibt.

Dann gilt:

$$perm(B) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m\}^n \\ \prod_{j=1}^{n} A_{i_j,j}=1}} \prod_{j=1}^{n} (b_{i_j} - \#\{j' \in \{1,\ldots,j-1\} | i_{j'} = i_j\})$$

Dass dieses Polynom tatsächlich die verallgemeinerte Permanente der ursprünglichen Matrix berechnet, ist anhand der Bemerkung nach Definition 42 zu sehen, welche besagt, dass die verallgemeinerte Permanente einer binären Matrix gleich der Anzahl der Möglichkeiten ist, in jeder Spalte genau eine „1“ auszuwählen, sodass keine zwei in derselben Zeile stehen. Jeder in der Summe zulässige Auswahl von Indizes entspricht genau einer der möglichen Auswahlen von genau einer „1“ in jeder Spalte von A. Im entsprechenden Summanden werden nun die Vielfachheiten der gewählten Zeilen multipliziert, wobei sich diese um die Anzahl jener zuvor aufgetretenen Indizes reduziert, die gleich dem aktuellen sind, da diese angibt, wie oft die aktuelle Zeile bereits ausgewählt wurde. Wird eine Zeile öfter als ihre Vielfachheit erlaubt ausgewählt, so ist der Faktor für die „Vielfachheit + 1“te Wahl der Zeile gleich 0 und damit ebenso das gesamte Produkt.

Das Einsetzen der verschiedenen Vektoren der Vielfachheiten in das Polynom kann nun etwa mithilfe des Horner-Schemas erfolgen.

6.1.5. Anwendung bei Texas Hold'em Poker

Der in diesem Kapitel vorgestellte Algorithmus konnte erfolgreich verwendet werden, um die in Kapitel 5 beschriebenen Wahrscheinlichkeiten beim Kartenspiel Texas Hold'em Poker für bis zu sechs Spieler zu berechnen. Dazu war es notwendig, für jedes $n \in \{1,\ldots,6\}$ und jedes $k \in \{0,\ldots,n\}$ die Anzahl der $(n-k,k)$-Matchings von insgesamt 151215 gefärbten Graphen zu bestimmen. Zur Anwendung kam dabei ein handelsüblicher Computer mit Dual-Core Prozessor mit 2.3GHz pro Kern und 4GB Arbeitsspeicher. Die verwendeten Programme wurden in C++ geschrieben. Das Anlegen der Datenbank der Matrizen dauerte sieben Tage und erforderte etwa 165Gb an Festplattenkapazität. Dabei wurde zuerst für jeden der 151215 Graphen eine eigene Datenbank im Arbeitsspeicher gehalten, auf die Festplatte geschrieben und anschließend zusammengefügt. Die Zahl der Matrizen, deren verallgemeinerte Permanente berechnet werden musste, reduzierte sich durch die im Unterabschnitt 6.1.3 beschriebene Methode von 62593054397 auf 333619695 um eine Faktor von etwa 188 (wobei eine gewisse Klasse von Matrizen nicht in die Datenbank aufgenommen, sondern sofort ausgewertet wurde, siehe dazu: Unterabschnitt 6.1.6). Das Berechnen der reduzierten Permanenten der verbleibenden Matrizen dauerte weitere 13 Tage.

Das Ergebnis ist vollständig auf der beiliegenden DVD enthalten. Im Programm *Wahrscheinlichkeiten* (Win32) kann ein beliebiger River eingegeben werden und für diesen werden dann die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten angezeigt. Das Programm liest diese aus einer auf der DVD befindlichen Datenbank aus. Liegt ein River in Form zweier 7-Tupel $(W_1,W_2,W_3,W_4,W_5,W_6,W_7)$ und $(F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6,F_7)$ vor, wobei das erste die Kartenwerte enthält (2 bis 10, Bube, Dame, König, Ass entsprechen dabei den Zahlen 1 bis 13), das zweite die zugehörigen Kartenfarben (1 bis 4) und die ersten fünf Einträge für die Gemeinschaftskarten stehen, so kann der Nenner P der entsprechenden Wahrscheinlichkeit für N Spieler und Unentschieden gegen U über den folgenden Pseudocode aus der Datenbank ausgelesen werden:

```
OPEN \HFZ7
    FOR z1 = 1 TO 4 DO
        FOR z2 = 1 TO 4 DO
            FOR z3 = 1 TO 4 DO
                FOR z4 = 1 TO 4 DO
                    FOR z5 = 1 TO 4 DO
                        FOR z6 = 1 TO 4 DO
                            FOR z7 = 1 TO 4 DO
                                READ HFZ7(z1, z2, z3, z4, z5, z6, z7)
                                (signierte 16-Bit Ganzzahl)
CLOSE

OPEN \HFP7
    FOR z1 = 1 TO 715 DO
        FOR z2 = 1 TO 240 DO
            READ HFP7(z1, z2)
            (signierte 16-Bit Ganzzahl)
CLOSE

OPEN \HWZ\W1\W2\W3
    FOR z4 = 1 TO 13 DO
        FOR z5 = 1 TO 13 DO
            FOR z6 = 1 TO 13 DO
                FOR z7 = 1 TO 13 DO
                    READ HWZ(z4, z5, z6, z7)
                    (signierte 32-Bit Ganzzahl)
CLOSE

OPEN \HWP\W1\W2\W3
    FOR z4 = 1 TO 13 DO
        FOR z5 = 1 TO 13 DO
            FOR z6 = 1 TO 13 DO
                FOR z7 = 1 TO 13 DO
                    READ HWP(z4, z5, z6, z7)
                    (signierte 16-Bit Ganzzahl)
CLOSE

W = HWZ(W4, W5, W6, W7) + 1
F = HFZ7(F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7) + 1
WP = HWP(W4, W5, W6, W7) + 1
FP = HFP7(F, WP) + 1
```

```
OPEN \HG\W
    FOR z1 = 1 TO 715
        READ HG(z1)
        (signierte 32-Bit Ganzzahl)
CLOSE

G = HG(FP)

OPEN \P5\G
    FOR z1 = 1 TO 5 DO
        FOR z2 = 1 TO 6 DO
            FOR z3 = 1 TO 2 DO
                READ P5(z1, z2, z3)
                (signierte 32-Bit Ganzzahl)
CLOSE

P = P5(N, U + 1, 2) * 1000000000 + P5(N, U + 1, 1)
```

Werden die Wahrscheinlichkeiten sehr häufig benötigt (etwa um jene für einen gegebenen Preflop über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit auszurechnen), so kann die gesamte Datenbank natürlich auch in den Speicher geladen werden. HG nimmt nur Werte von 1 bis 151215 an und daher ist eine Aufteilung der eigentlichen 32-Bit Ganzzahl in eine 16-Bit und eine 8-Bit Ganzzahl möglich. Die dafür nötigen Arrays haben dann folgende Abmessungen:

```
HWZ(13, 13, 13, 13, 13, 13, 13)      4 Byte
HWP(13, 13, 13, 13, 13, 13, 13)      2 Byte
HFZ7(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)            2 Byte
HFP7(715, 240)                       2 Byte
HG1(558883, 715)                     2 Byte
HG2(558883, 715)                     1 Byte
P5(151215, 5, 6, 2)                  4 Byte
```

Insgesamt werden also

$$8(13^7 + 151215 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2) + 4(13^7 + 4^7 + 715 \cdot 240) + 3 \cdot 558883 \cdot 715 = 1611962705$$

Byte an Arbeitsspeicher benötigt, womit die gesamte Datenbank ohne Probleme auch bei Verwendung jener Windows-Versionen im Speicher gehalten werden kann, welche den virtuellen Speicher auf 2GB begrenzen.

Beispielhaft werden alle gesuchten Wahrscheinlichkeiten für ausgewählte River im Anhang präsentiert, sowie eine vollständige Tabelle der Wahrscheinlichkeiten aller Preflops.

Außerdem kann mithilfe der vollständigen Datenbank aller Wahrscheinlichkeiten auch die Frage beantwortet werden, wie viele wesentlich verschiedenen River es bei einer gegebenen Spieleranzahl zwischen 2 und 6 tatsächlich gibt (151215 bildet eine obere Schranke für eine beliebige Spieleranzahl, also 2 bis 23). Es ergeben sich folgende Werte:

2 Spieler: 20687
3 Spieler: 131152
4 Spieler: 132368
5 Spieler: 132358
6 Spieler: 132306

Interessanterweise scheint ein Maximum bei vier Spielern erreicht zu sein. Dies liegt vermutlich daran, dass es ab vier Spielern nicht mehr möglich ist, mit einem Paar in der eigenen Hand gegen drei Spieler unentschieden zu spielen, da es pro Kartenwert nur vier Farben (Pik, Kreuz, Herz und Karo) gibt und ein Unentschieden mit zwei Spielern nur dann möglich ist, wenn das eigene Paar eine Straße (Staight) komplettiert. Aus demselben Grund (vier Farben) ist es darüber hinaus mit einer beliebigen Hand ab fünf Spielern nicht mehr möglich, gegen einschließlich vier bis exklusive „Spieleranzahl“ Spieler unentschieden zu spielen. Es wird interessant sein zu sehen, ob es bei sieben Spielern ebenfalls 132306 wesentlich verschiedene River gibt. Dies könnte damit der exakte Wert auch für alle größeren Spieleranzahlen sein. Leider wird die Beantwortung dieser Frage mit dem 1. Juli 2011 noch einige Wochen an Rechenzeit in Anspruch nehmen.

6.1.6. Mögliche Verbesserungen und offene Fragen

Es gibt an verschiedenen Stellen Möglichkeiten, den Algorithmus zu verbessern. Eine dieser Verbesserungen wurde auch beim Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten bei Texas Hold'em Poker angewendet, nämlich ein direktes Berechnen der verallgemeinerten Permanenten von Matrizen gewisser Klassen, ohne diese zuvor in die Datenbank einzusortieren (siehe Unterabschnitt 6.1.3). Diese Klasse bildeten jene Matrizen, in welchen die Einträge jeder Spalte bis zu einer Stelle „0“ sind und von dort an „1“ oder umgekehrt (ein Fall für alle Spalten). Für diese Matrizen lässt sich die verallgemeinerte Permanente sehr leicht in Abhängigkeit der Anzahlen der „1“en ausrechnen.

Lemma 6.1.3
Seien die Einträge des Vektors $(c_1, \ldots, c_m)$ *die Anzahlen der „1“en in den* m *Spalten einer binären Matrix* A *der obigen Gestalt in aufsteigender Reihenfolge.*
Dann gilt:
$perm(A) = \prod_{i=1}^{m} c_i - i + 1$ *falls jeder Faktor des Produktes größer als* 0 *ist und*
$perm(A) = 0$ *sonst.*

Gemäß der Bemerkung nach Definition 42 ist die verallgemeinerte Permanente einer binären Matrix gleich der Anzahl der Möglichkeiten, in jeder Spalte genau eine „1“ auszuwählen, sodass keine zwei in derselben Zeile stehen. Mit jeder gewählten „1“ in einer Spalte wird also die „1“ in der selben Zeile für alle nachfolgenden Spalten als Möglichkeit ausgeschlossen. Werden dabei gleich viele oder mehr „1“en ausgeschlossen, als zur Verfügung stehen (ist also der entsprechende Faktor gleich oder kleiner als 0), so gibt es keine Möglichkeit, eine gültige Auswahl von „1“en zu treffen und die Permanente ist 0.

Eine Ausweitung auf andere Klassen ist denkbar und diese können auch an den speziellen Anwendungsfall des Algorithmus angepasst werden, falls in diesem bestimmte Arten von Matrizen besonders häufig auftreten.

Eine weitere Möglichkeit, die Effizienz des Algorithmus zu erhöhen, ist das Einsetzen der Vielfachheiten in das Polynom aus Unterabschnitt 6.1.4 zu optimieren, sodass möglichst wenig Rechenschritte erforderlich sind. Im genannten Unterabschnitt wird etwa das Horner-Schema vorgeschlagen, doch je nach Beschaffenheit der Graphen könnten andere Methoden besser geeignet sein.

Auch bei der Vorbereitung der Graphen (Unterabschnitt 6.1.2) sind andere Varianten denkbar, die den Algorithmus möglicherweise effizienter machen.

Zur im Unterabschnitt 6.1.3 beschriebene Methode, die Zeilen und Spalten der Matrizen lexikographisch zu ordnen, um einige der äquivalenten Matrizen zu erkennen, könnte es ebenfalls eine bessere Alternative geben.

Offene Fragen sind sicherlich, wie sich der Algorithmus in Spezialfällen verhält und welche Arten von Graphen besonders schlecht geeignet sind.

6.2. Matching- und Unabhängigkeitspolynome – Der Kantengraph

Wie in *Levit and Mandrescu [2005]* angemerkt wird, stellt das Unabhängigkeitspolynom eine Verallgemeinerung des Matchingpolynoms dar, da für einen beliebigen Graphen G stets $P^e_G = P^v_{L(G)}$ gilt. Daher kann das Matchingpolynom eines Graphen – und damit die Anzahl seiner k-Matchings – auch über den Umweg des Unabhängigkeitspolynoms seines Kantengraphen berechnet werden. In diesem Abschnitt wird ein diesbezüglicher Algorithmus beschrieben, der in *Cash [2007]* hergeleitet und als der effizienteste, bekannte Algorithmus bezeichnet wird, um das Unabhängigkeitspolynom eines beliebigen Graphen zu berechnen. Beim Bestimmen der in Kapitel 5 beschriebenen Wahrscheinlichkeiten beim Kartenspiel Texas Hold'em Poker erweist sich der Algorithmus jedoch als praktisch nicht anwendbar. Zum einen berechnet er immer das gesamte Matchingpolynom – von diesem also alle Koeffizienten. Im Fall der Wahrscheinlichkeiten werden allerdings bloß gewisse dieser Koeffizienten benötigt, welche mit dem zuvor beschriebenen Algorithmus einzeln berechnet werden können. Zum anderen muss jeder der River-Graphen einzeln ausgewertet werden, wohingegen der andere Algorithmus Vorteile aus „inneren Ähnlichkeiten“ zweier oder mehrerer Graphen zieht. Außerdem ist er für ungefärbte Graphen formuliert und daher nicht geeignet, um auch die Wahrscheinlichkeiten auf ein Unentschieden mit einem oder mehreren (außer allen) Gegnern zu berechnen.

Der Algorithmus beruht auf vier Formeln, welche im Abschnitt 4.2 bewiesen werden, nämlich:

1. Für disjunkte Graphen G und H gilt: $P^v_{G\cup H} = P^v_G \cdot P^v_H$
2. Für einen Graphen G gilt: $\forall v \in G_v : P^v_G(x) = P^v_{G-v}(x) + xP^v_{G-N_G(v)}(x)$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : P^v_{P_n}(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}}\right)^{n+1} \cdot U_{n+1}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{x}}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N} : P^v_{C_n}(x) = 2\left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}}\right)^{n} \cdot T_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{x}}\right)$

Die Formeln 3 und 4 werden in *Levit and Mandrescu [2005]* falsch angegeben. Es wurden jeweils Klammern um den Ausdruck $2\sqrt{x}$ vergessen, wodurch $\sqrt{x}$ im Zähler des Bruches steht.

Die Idee ist, mithilfe von Formel 2 so lange Knoten aus dem Graphen zu entfernen, bis der verbleibende Graph nur noch aus Knoten vom Grad ≤ 2 besteht, also all seine Zusammenhangskomponenten Pfade oder Zyklen sind. Dieser Fall lässt sich nun mit den Formeln 1, 2 und 4 direkt auswerten. Der Auswahl des Knoten, welcher aus dem Graphen entfernt werden soll, kommt dabei besondere Bedeutung zu, da eine günstige Wahl den Zeitaufwand um mehrerer Größenordnungen reduzieren kann. Der Autor schlägt vor, einen jener Knoten zu wählen, welche über die größte „erweiterte Konnektivität“ verfügen, deren Nachbarschaften aller Ordnungen also möglichst viele Knoten enthalten (genauer: Die Folge der Kardinalitäten der Nachbarschaften wachsender Ordnung soll unter lexikographischer Ordnung zu den größten gehören). Da die Bestimmung des in diesem Sinne „besten“ Knoten im Allgemeinen aufwändig ist, bleibt bei der Implementation ein gewisser Spielraum, um – je nach Problem – zumindest einen „möglichst guten“ Knoten zu finden.

Die folgende Abbildung fasst die Arbeitsweise des Algorithmus zusammen:

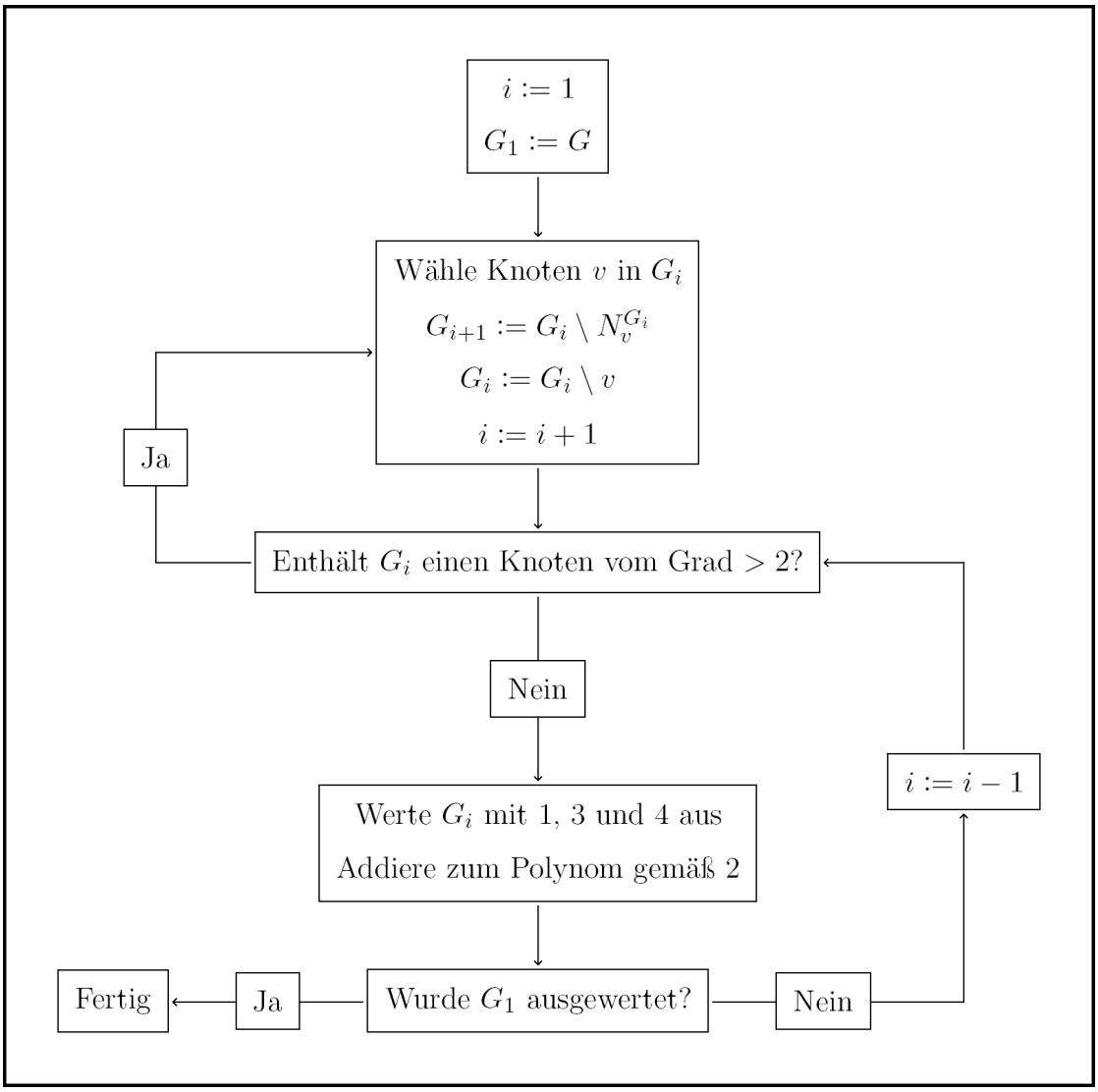


Abbildung 6.1.: Ein Flussdiagramm des Algorithmus von *Cash [2007]*

A. River und Preflops

In den folgenden Abbildungen ist der zum gewählten River gehörende, vollständige kantengefärbte Graph mit 45 Knoten zu sehen (rechts), sowie der rote und der blaue Teilgraph. Darunter sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten abgebildet, wobei die Zeile die Anzahl der Gegner festlegt (von 1 bis 5) und die Spalte die Anzahl der Spieler, gegen die unentschieden gespielt werden soll (von 0 bis Spieleranzahl). Die Zähler der Brüche entsprechen dabei der Anzahl der jeweiligen K-Matchings des rot- und blaugefärbten Teilgraphen.

Die nachfolgenden Tabellen enthalten die Wahrscheinlichkeiten für alle prinzipiell verschiedenen Preflops. Dabei wird die jeweilige Kartenkombination (Hand) im Format

{Kleiner Wert}{Großer Wert}[s]

angegeben, wobei „Kleiner Wert“ und „Großer Wert“ die Kartenwerte bezeichnen (T $\sim$ 10, J $\sim$ Bube, Q $\sim$ Dame, K $\sim$ König, A $\sim$ Ass) und ein „s“ (für das englische Wort „suited“) am Ende bedeutet, dass die beiden Karten dieselbe Farbe haben. Im Kopf der Tabelle ist die Anzahl der Gegner, mit wie vielen von diesen unentschieden gespielt werden soll, sowie der Nenner der Brüche angegeben. Ist n die Anzahl der Gegner, so gilt:

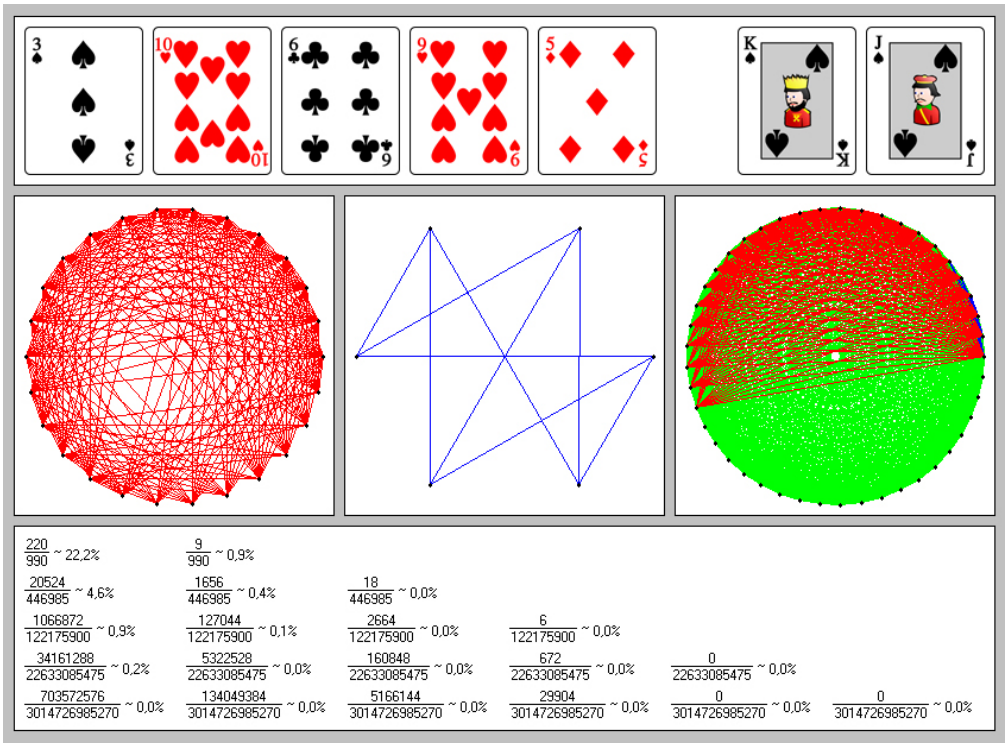
$$N = \tbinom{50}{5} \cdot \tfrac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{45-2k}{2}$$

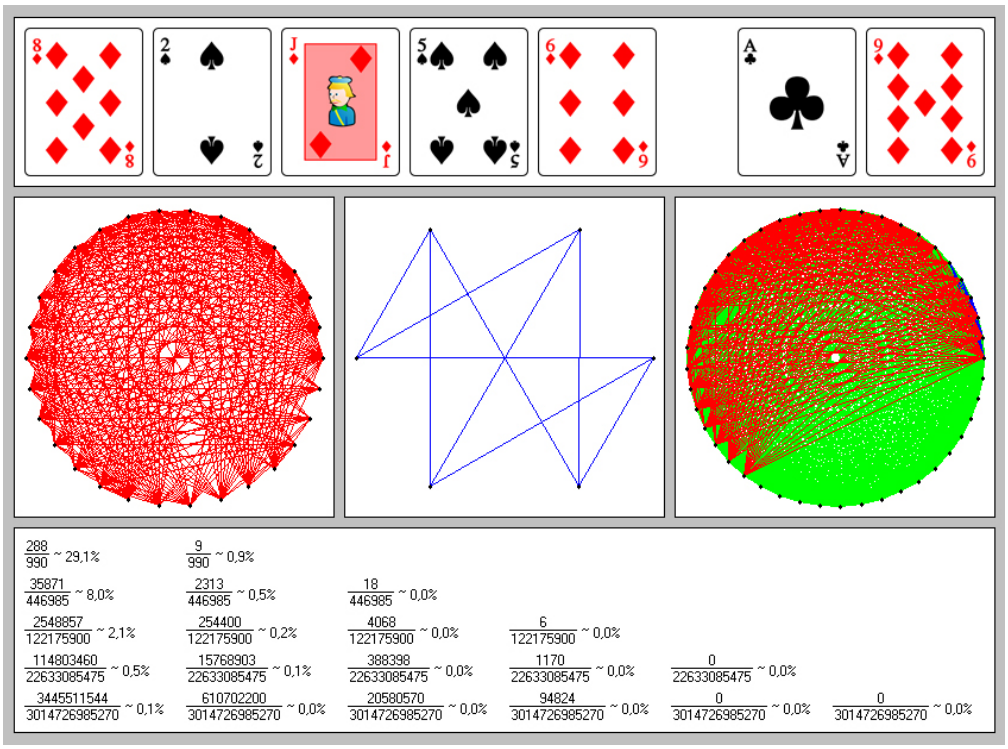
Die vorletzte Tabelle – für 5 Gegner und Unentschieden gegen 4 – unterstreicht die Plausibilität der errechneten Werte, da ein derartiger Ausgang eines Spieles tatsächlich unmöglich ist (siehe dazu: Unterabschnitt 6.1.5).

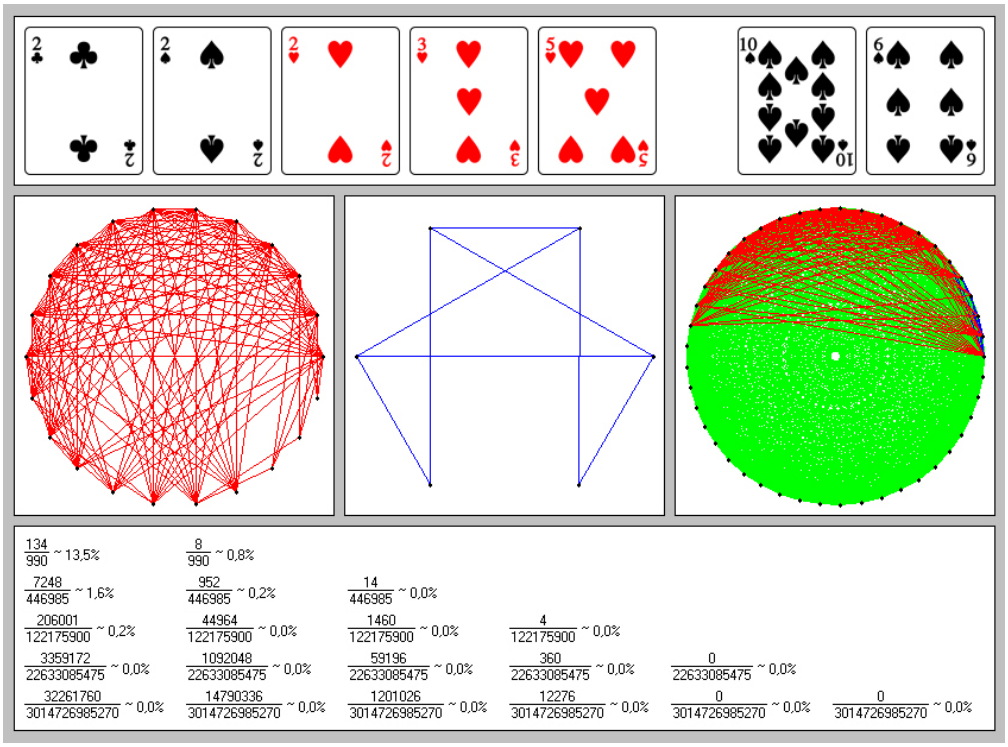
Es stehen auch einige Online-Kalkulatoren zum Berechnen verschiedenster Wahrscheinlichkeiten bei Texas Hold'em Poker zur Verfügung. Diese simulieren meist einige Millionen Spiele unter den ausgewählten Voraussetzungen (etwa zwei Asse in der eigenen Hand) um Näherungen zu finden. Zwei dieser Kalkulatoren können unter folgenden Adressen gefunden werden:
http://www.pokerprobability.net/calculator/texas-holdem.html
http://www.pokerprobability.co.uk/poker-odds-calculator.php
Bei einem Test des Verfassers lagen beide Programme bei Spielen mit fünf Gegnern teilweise um über 7% (Prozentpunkte) daneben.

Ein weiteres Programm, welches ebenfalls online verfügbar ist und auch exakte Wahrscheinlichkeiten berechnen kann, ist Poker Stove (*http://pokerstove.com*). Dieses lieferte (in Version 1.23) für alle getesteten Preflops für einen oder zwei Gegner korrekte Ergebnisse. Allerdings würde es auf der im Unterabschnitt 6.1.5 beschriebenen Hardware für einen einzigen Preflop gegen fünf Gegner hochgerechnet etwa 60000 Jahre benötigen, um die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Für die unten folgenden Tabellen für fünf Gegner also über 10 Millionen Jahre. Selbst wenn der verwendete Algorithmus beliebig parallelisierbar ist, würde es also einen Supercomputer mit 91250000 Prozessorkernen benötigen,

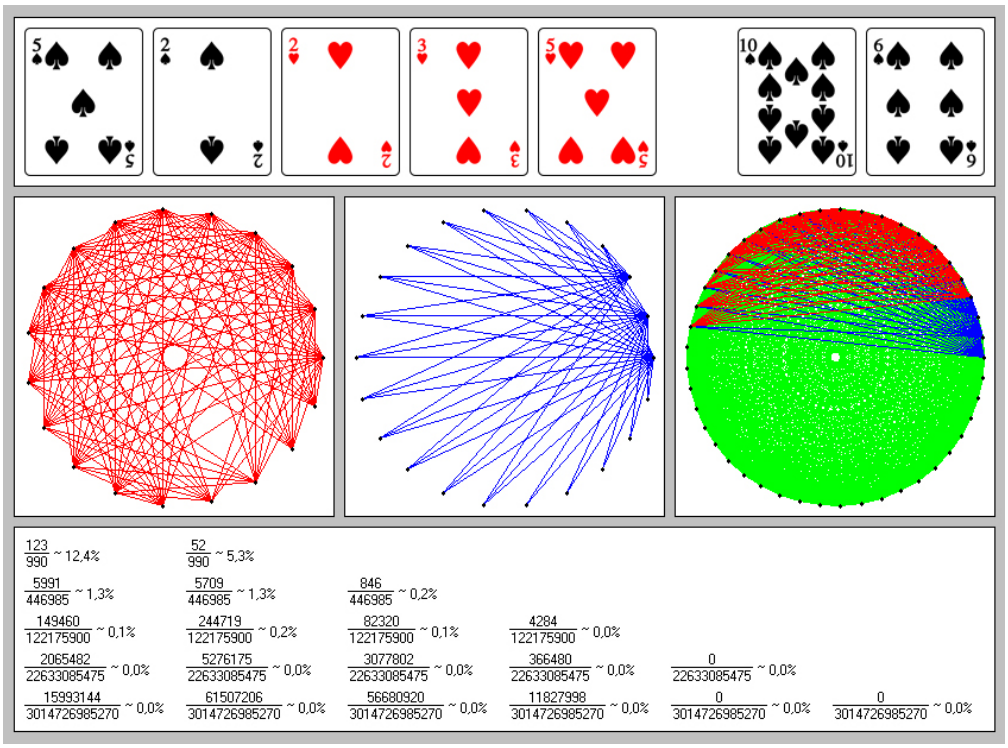
um die 40 Tage (20 Tage mit 2 Kernen) des Algorithmus aus Kapitel 6 zu erzielen – eine Zahl, die von keinem existierenden Supercomputer auch nur annähernd erreicht wird.



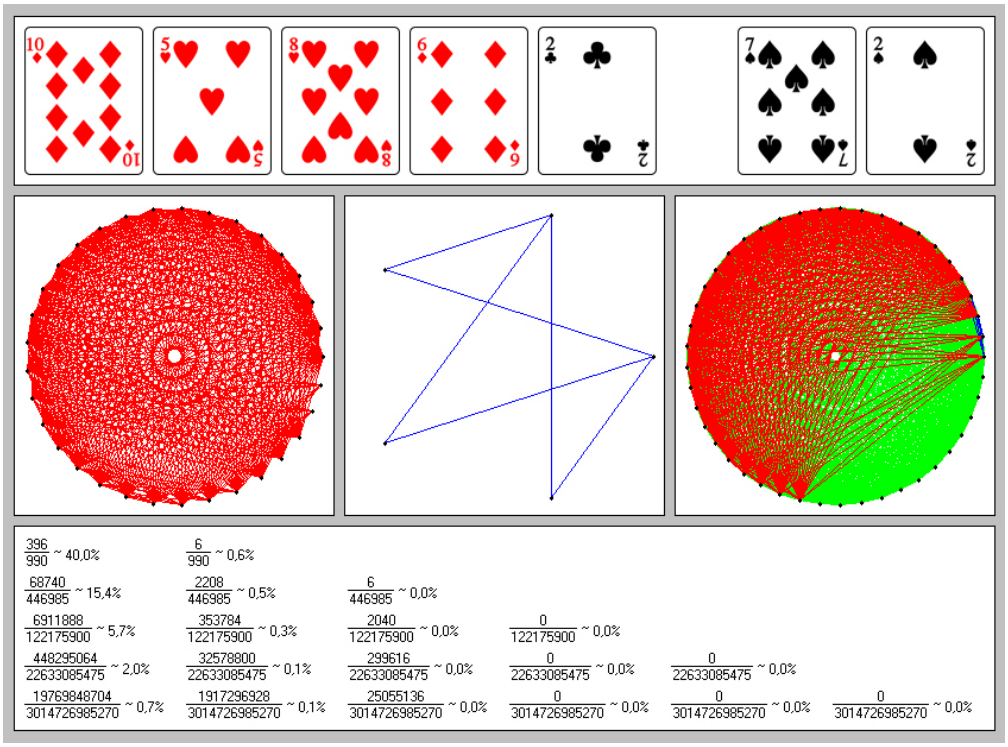


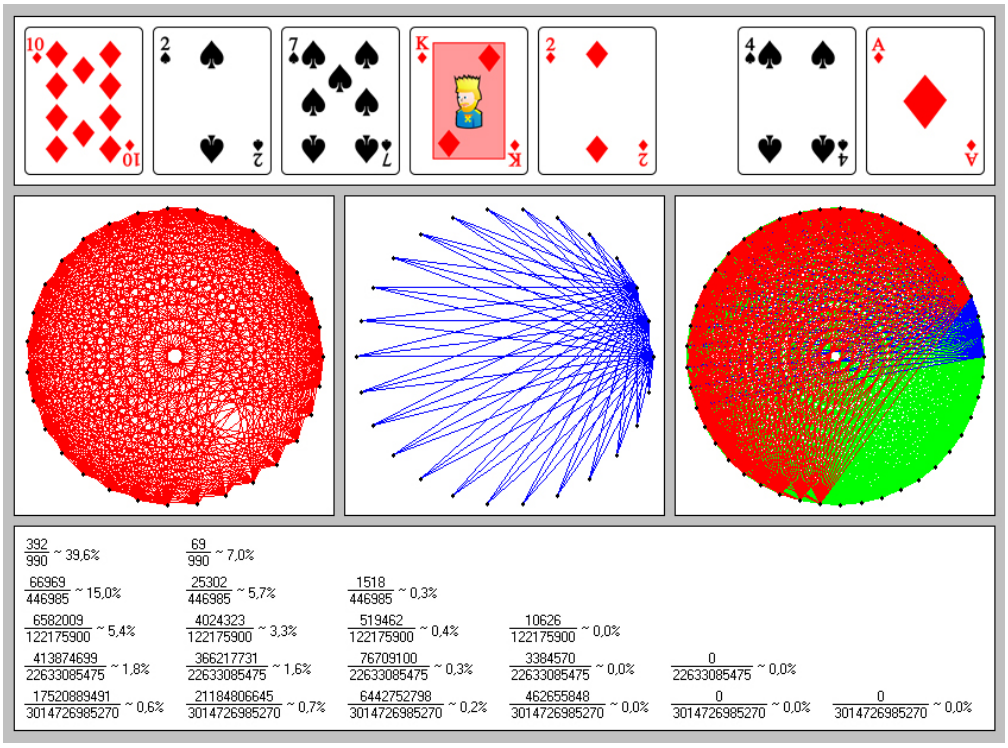


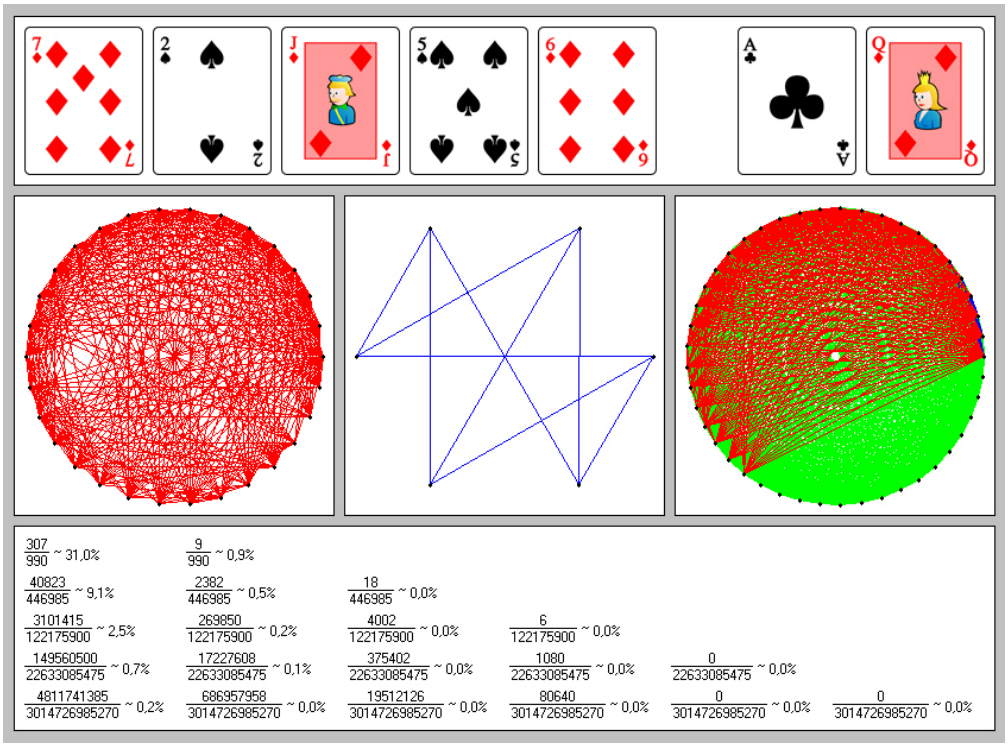
$\frac{134}{990} \sim 13{,}5\%$	$\frac{8}{990} \sim 0{,}8\%$					
$\frac{7248}{446985} \sim 1{,}6\%$	$\frac{952}{446985} \sim 0{,}2\%$	$\frac{14}{446985} \sim 0{,}0\%$				
$\frac{206001}{122175900} \sim 0{,}2\%$	$\frac{44964}{122175900} \sim 0{,}0\%$	$\frac{1460}{122175900} \sim 0{,}0\%$	$\frac{4}{122175900} \sim 0{,}0\%$			
$\frac{3359172}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{1092048}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{59196}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{360}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{0}{22633085475} \sim 0{,}0\%$		
$\frac{32261760}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{14790336}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{1201026}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{12276}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	

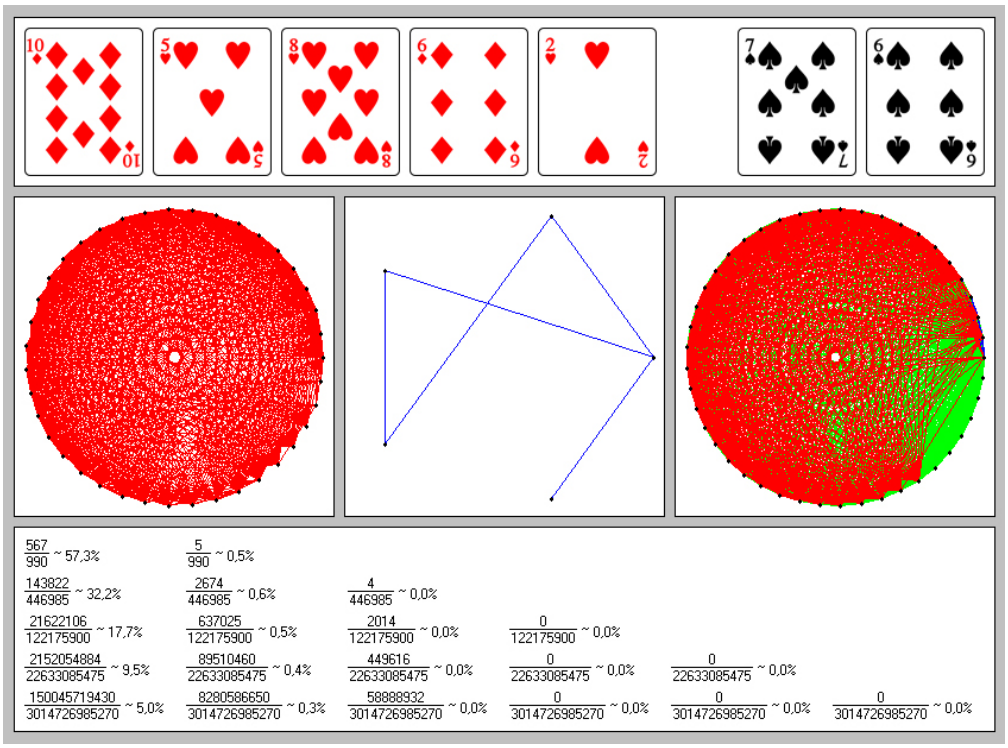


$\frac{123}{990} \sim 12{,}4\%$	$\frac{52}{990} \sim 5{,}3\%$					
$\frac{5991}{446985} \sim 1{,}3\%$	$\frac{5709}{446985} \sim 1{,}3\%$	$\frac{846}{446985} \sim 0{,}2\%$				
$\frac{149460}{122175900} \sim 0{,}1\%$	$\frac{244719}{122175900} \sim 0{,}2\%$	$\frac{82320}{122175900} \sim 0{,}1\%$	$\frac{4284}{122175900} \sim 0{,}0\%$			
$\frac{2065482}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{5276175}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{3077802}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{366480}{22633085475} \sim 0{,}0\%$	$\frac{0}{22633085475} \sim 0{,}0\%$		
$\frac{15993144}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{61507206}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{56680920}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{11827998}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	$\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$	


396/990 ~ 40,0%
6/990 ~ 0,6%
68740/446985 ~ 15,4%
2208/446985 ~ 0,5%
6/446985 ~ 0,0%
6911888/122175900 ~ 5,7%
353784/122175900 ~ 0,3%
2040/122175900 ~ 0,0%
0/122175900 ~ 0,0%
448295064/22633085475 ~ 2,0%
32578800/22633085475 ~ 0,1%
299616/22633085475 ~ 0,0%
0/22633085475 ~ 0,0%
0/22633085475 ~ 0,0%
1976984870/3014726985270 ~ 0,7%
1917296928/3014726985270 ~ 0,1%
25055136/3014726985270 ~ 0,0%
0/3014726985270 ~ 0,0%
0/3014726985270 ~ 0,0%
0/3014726985270 ~ 0,0%


392/990 ~ 39,6%
69/990 ~ 7,0%
66969/446985 ~ 15,0%
25302/446985 ~ 5,7%
1518/446985 ~ 0,3%
6582009/122175900 ~ 5,4%
4024323/122175900 ~ 3,3%
519462/122175900 ~ 0,4%
10626/122175900 ~ 0,0%
413874699/22633085475 ~ 1,8%
366217731/22633085475 ~ 1,6%
76709100/22633085475 ~ 0,3%
3384570/22633085475 ~ 0,0%
0/22633085475 ~ 0,0%
17520889491/3014726985270 ~ 0,6%
21184806645/3014726985270 ~ 0,7%
6442752798/3014726985270 ~ 0,2%
462655848/3014726985270 ~ 0,0%
0/3014726985270 ~ 0,0%
0/3014726985270 ~ 0,0%


$\frac{307}{990} \sim 31{,}0\%$ $\frac{9}{990} \sim 0{,}9\%$
$\frac{40823}{446985} \sim 9{,}1\%$ $\frac{2382}{446985} \sim 0{,}5\%$ $\frac{18}{446985} \sim 0{,}0\%$
$\frac{3101415}{122175900} \sim 2{,}5\%$ $\frac{269850}{122175900} \sim 0{,}2\%$ $\frac{4002}{122175900} \sim 0{,}0\%$ $\frac{6}{122175900} \sim 0{,}0\%$
$\frac{149560500}{22633085475} \sim 0{,}7\%$ $\frac{17227608}{22633085475} \sim 0{,}1\%$ $\frac{375402}{22633085475} \sim 0{,}0\%$ $\frac{1080}{22633085475} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{22633085475} \sim 0{,}0\%$
$\frac{4811741385}{3014726985270} \sim 0{,}2\%$ $\frac{686957958}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$ $\frac{19512126}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$ $\frac{80640}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$


$\frac{567}{990} \sim 57{,}3\%$ $\frac{5}{990} \sim 0{,}5\%$
$\frac{143822}{446985} \sim 32{,}2\%$ $\frac{2674}{446985} \sim 0{,}6\%$ $\frac{4}{446985} \sim 0{,}0\%$
$\frac{21622106}{122175900} \sim 17{,}7\%$ $\frac{637025}{122175900} \sim 0{,}5\%$ $\frac{2014}{122175900} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{122175900} \sim 0{,}0\%$
$\frac{2152054884}{22633085475} \sim 9{,}5\%$ $\frac{89510460}{22633085475} \sim 0{,}4\%$ $\frac{449616}{22633085475} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{22633085475} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{22633085475} \sim 0{,}0\%$
$\frac{150045719430}{3014726985270} \sim 5{,}0\%$ $\frac{8280586650}{3014726985270} \sim 0{,}3\%$ $\frac{58888932}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$ $\frac{0}{3014726985270} \sim 0{,}0\%$

Gegner: 1 Unentschieden gegen: 0 N: 2097572400

22:	1035889822 / N ~ 49,385%	49s:	868544377 / N ~ 41,407%	7Qs:	1101718156 / N ~ 52,523%
23s:	694128063 / N ~ 33,092%	49:	798877137 / N ~ 38,086%	7Q:	1046780178 / N ~ 49,904%
23:	613318625 / N ~ 29,239%	4Ts:	927212359 / N ~ 44,204%	7Ks:	1171417014 / N ~ 55,846%
24s:	711453440 / N ~ 33,918%	4T:	861166500 / N ~ 41,055%	7K:	1120467131 / N ~ 53,417%
24:	631734409 / N ~ 30,117%	4Js:	983104243 / N ~ 46,869%	7As:	1245678450 / N ~ 59,387%
25s:	732672291 / N ~ 34,930%	4J:	920178475 / N ~ 43,869%	7A:	1199171976 / N ~ 57,170%
25:	654312693 / N ~ 31,194%	4Qs:	1043815735 / N ~ 49,763%	88:	1441396848 / N ~ 68,717%
26s:	730742786 / N ~ 34,838%	4Q:	984280928 / N ~ 46,925%	89s:	1024795719 / N ~ 48,856%
26:	651897304 / N ~ 31,079%	4Ks:	1109381784 / N ~ 52,889%	89:	966316620 / N ~ 46,068%
27s:	743376257 / N ~ 35,440%	4K:	1053508976 / N ~ 50,225%	8Ts:	1059465943 / N ~ 50,509%
27:	665146081 / N ~ 31,710%	4As:	1198506708 / N ~ 57,138%	8T:	1003019374 / N ~ 47,818%
28s:	790348964 / N ~ 37,679%	4A:	1148061584 / N ~ 54,733%	8Js:	1097274797 / N ~ 52,312%
28:	714995931 / N ~ 34,087%	55:	1250992922 / N ~ 59,640%	8J:	1042779957 / N ~ 49,714%
29s:	838461663 / N ~ 39,973%	56s:	846332445 / N ~ 40,348%	8Qs:	1141436364 / N ~ 54,417%
29:	765970787 / N ~ 36,517%	56:	776369338 / N ~ 37,013%	8Q:	1089280295 / N ~ 51,931%
2Ts:	892310673 / N ~ 42,540%	57s:	859564300 / N ~ 40,979%	8Ks:	1191219968 / N ~ 56,790%
2T:	823068840 / N ~ 39,239%	57:	790253778 / N ~ 37,675%	8K:	1141742922 / N ~ 54,432%
2Js:	948153923 / N ~ 45,202%	58s:	880780296 / N ~ 41,990%	8As:	1269195105 / N ~ 60,508%
2J:	882013792 / N ~ 42,049%	58:	812626207 / N ~ 38,741%	8A:	1224440175 / N ~ 58,374%
2Qs:	1008970414 / N ~ 48,102%	59s:	908515397 / N ~ 43,313%	99:	1503238936 / N ~ 71,666%
2Q:	946213445 / N ~ 45,110%	59:	841896769 / N ~ 40,137%	9Ts:	1098642842 / N ~ 52,377%
2Ks:	1074795095 / N ~ 51,240%	5Ts:	942628592 / N ~ 44,939%	9T:	1044920282 / N ~ 49,816%
2K:	1015702916 / N ~ 48,423%	5T:	877990854 / N ~ 41,857%	9Js:	1135038051 / N ~ 54,112%
2As:	1164284001 / N ~ 55,506%	5Js:	1003078936 / N ~ 47,821%	9J:	1083173398 / N ~ 51,639%
2A:	1110608066 / N ~ 52,947%	5J:	941907501 / N ~ 44,905%	9Qs:	1179313858 / N ~ 56,223%
33:	1108341244 / N ~ 52,839%	5Qs:	1063751334 / N ~ 50,713%	9Q:	1129794528 / N ~ 53,862%
34s:	749407203 / N ~ 35,727%	5Q:	1005974746 / N ~ 47,959%	9Ks:	1229977429 / N ~ 58,638%
34:	672613963 / N ~ 32,066%	5Ks:	1129204024 / N ~ 53,834%	9K:	1183191163 / N ~ 56,408%
35s:	771039857 / N ~ 36,759%	5K:	1075088026 / N ~ 51,254%	9As:	1290209940 / N ~ 61,510%
35:	695659494 / N ~ 33,165%	5As:	1217936943 / N ~ 58,064%	9A:	1247001366 / N ~ 59,450%
36s:	769503449 / N ~ 36,685%	5A:	1169234974 / N ~ 55,742%	TT:	1566053110 / N ~ 74,660%
36:	693662773 / N ~ 33,070%	66:	1315178390 / N ~ 62,700%	TJs:	1177887186 / N ~ 56,155%
37s:	782469104 / N ~ 37,304%	67s:	898379280 / N ~ 42,829%	TJ:	1129039428 / N ~ 53,826%
37:	707257588 / N ~ 33,718%	67:	831767413 / N ~ 39,654%	TQs:	1220171285 / N ~ 58,171%
38s:	803004465 / N ~ 38,283%	68s:	919124997 / N ~ 43,819%	TQ:	1173537003 / N ~ 55,947%
38:	728903246 / N ~ 34,750%	68:	853640324 / N ~ 40,697%	TKs:	1270857555 / N ~ 60,587%
39s:	855951949 / N ~ 40,807%	69s:	947078416 / N ~ 45,151%	TK:	1226959959 / N ~ 58,494%
39:	785077590 / N ~ 37,428%	69:	883149152 / N ~ 42,103%	TAs:	1331725962 / N ~ 63,489%
3Ts:	909895095 / N ~ 43,378%	6Ts:	981668027 / N ~ 46,800%	TA:	1291435142 / N ~ 61,568%
3T:	842284099 / N ~ 40,155%	6T:	919746160 / N ~ 43,848%	JJ:	1618339604 / N ~ 77,153%
3Js:	965759044 / N ~ 46,042%	6Js:	1018879951 / N ~ 48,574%	JQs:	1239054394 / N ~ 59,071%
3J:	901258949 / N ~ 42,967%	6J:	958874577 / N ~ 45,714%	JQ:	1193649409 / N ~ 56,906%
3Qs:	1026518567 / N ~ 48,938%	6Qs:	1084009562 / N ~ 51,679%	JKs:	1289515286 / N ~ 61,477%
3Q:	965405538 / N ~ 46,025%	6Q:	1027737078 / N ~ 48,997%	JK:	1246822903 / N ~ 59,441%
3Ks:	1092208613 / N ~ 52,070%	6Ks:	1149567662 / N ~ 54,805%	JAs:	1350786717 / N ~ 64,398%
3K:	1034758983 / N ~ 49,331%	6K:	1096969965 / N ~ 52,297%	JA:	1311720573 / N ~ 62,535%
3As:	1181668536 / N ~ 56,335%	6As:	1220344506 / N ~ 58,179%	QQ:	1670338644 / N ~ 79,632%
3A:	1129654161 / N ~ 53,855%	6A:	1171920110 / N ~ 55,870%	QKs:	1309061790 / N ~ 62,408%
44:	1180021110 / N ~ 56,257%	77:	1378636878 / N ~ 65,725%	QK:	1267610255 / N ~ 60,432%
45s:	808247748 / N ~ 38,533%	78s:	958257237 / N ~ 45,684%	QAs:	1370002117 / N ~ 65,314%
45:	735719749 / N ~ 35,075%	78:	895522755 / N ~ 42,693%	QA:	1332142795 / N ~ 63,509%
46s:	807166360 / N ~ 38,481%	79s:	985655348 / N ~ 46,990%	KK:	1722470558 / N ~ 82,117%
46:	734213031 / N ~ 35,003%	79:	924443362 / N ~ 44,072%	KAs:	1389004215 / N ~ 66,220%
47s:	820337671 / N ~ 39,109%	7Ts:	1020494848 / N ~ 48,651%	KA:	1352291878 / N ~ 64,469%
47:	748030580 / N ~ 35,662%	7T:	961312472 / N ~ 45,830%	AA:	1781508418 / N ~ 84,932%
48s:	841184813 / N ~ 40,103%	7Js:	1058318785 / N ~ 50,454%		
48:	770001459 / N ~ 36,709%	7J:	1001090143 / N ~ 47,726%		

Gegner: 1 Unentschieden gegen: 1 N: 2097572400

22:	39805340 / N ~ 1,898%	49s:	102984434 / N ~ 4,910%	7Qs:	74622259 / N ~ 3,558%
23s:	121342843 / N ~ 5,785%	49:	108455313 / N ~ 5,171%	7Q:	78084287 / N ~ 3,723%
23:	128529945 / N ~ 6,128%	4Ts:	97596865 / N ~ 4,653%	7Ks:	70957375 / N ~ 3,383%
24s:	122123616 / N ~ 5,822%	4T:	102727325 / N ~ 4,897%	7K:	74254989 / N ~ 3,540%
24:	129308773 / N ~ 6,165%	4Js:	92368088 / N ~ 4,404%	7As:	67008466 / N ~ 3,195%
25s:	122489533 / N ~ 5,840%	4J:	97228759 / N ~ 4,635%	7A:	70129398 / N ~ 3,343%
25:	129665137 / N ~ 6,182%	4Qs:	87773537 / N ~ 4,185%	88:	18695790 / N ~ 0,891%
26s:	118782017 / N ~ 5,663%	4Q:	92415629 / N ~ 4,406%	89s:	81573810 / N ~ 3,889%
26:	125706786 / N ~ 5,993%	4Ks:	83726409 / N ~ 3,992%	89:	85106929 / N ~ 4,057%
27s:	113942467 / N ~ 5,432%	4K:	88195273 / N ~ 4,205%	8Ts:	76570746 / N ~ 3,650%
27:	120541920 / N ~ 5,747%	4As:	79533094 / N ~ 3,792%	8T:	79840679 / N ~ 3,806%
28s:	108755450 / N ~ 5,185%	4A:	83768953 / N ~ 3,994%	8Js:	71484894 / N ~ 3,408%
28:	114982393 / N ~ 5,482%	55:	28731922 / N ~ 1,370%	8J:	74526982 / N ~ 3,553%
29s:	102454551 / N ~ 4,884%	56s:	116843119 / N ~ 5,570%	8Qs:	67152284 / N ~ 3,201%
29:	108273467 / N ~ 5,162%	56:	122982645 / N ~ 5,863%	8Q:	70028300 / N ~ 3,339%
2Ts:	96459882 / N ~ 4,599%	57s:	113123404 / N ~ 5,393%	8Ks:	63847580 / N ~ 3,044%
2T:	101909963 / N ~ 4,858%	57:	119028199 / N ~ 5,675%	8K:	66641512 / N ~ 3,177%
2Js:	91274251 / N ~ 4,351%	58s:	107166353 / N ~ 5,109%	8As:	60242341 / N ~ 2,872%
2J:	96454849 / N ~ 4,598%	58:	112692288 / N ~ 5,373%	8A:	62862129 / N ~ 2,997%
2Qs:	86722846 / N ~ 4,134%	59s:	101068049 / N ~ 4,818%	99:	16428186 / N ~ 0,783%
2Q:	91685171 / N ~ 4,371%	59:	106238788 / N ~ 5,065%	9Ts:	69247375 / N ~ 3,301%
2Ks:	82718864 / N ~ 3,944%	5Ts:	95533249 / N ~ 4,554%	9T:	71987711 / N ~ 3,432%
2K:	87508267 / N ~ 4,172%	5T:	100409701 / N ~ 4,787%	9Js:	65045137 / N ~ 3,101%
2As:	78559848 / N ~ 3,745%	5Js:	90862846 / N ~ 4,332%	9J:	67618021 / N ~ 3,224%
2A:	83116441 / N ~ 3,963%	5J:	95491577 / N ~ 4,552%	9Qs:	60474078 / N ~ 2,883%
33:	35819814 / N ~ 1,708%	5Qs:	86250529 / N ~ 4,112%	9Q:	62861351 / N ~ 2,997%
34s:	122271282 / N ~ 5,829%	5Q:	90660555 / N ~ 4,322%	9Ks:	56648553 / N ~ 2,701%
34:	129193193 / N ~ 6,159%	5Ks:	82185635 / N ~ 3,918%	9K:	58911625 / N ~ 2,809%
35s:	123097534 / N ~ 5,869%	5K:	86422307 / N ~ 4,120%	9As:	53342951 / N ~ 2,543%
35:	130040672 / N ~ 6,200%	5As:	77979612 / N ~ 3,718%	9A:	55504495 / N ~ 2,646%
36s:	119483186 / N ~ 5,696%	5A:	81983213 / N ~ 3,908%	TT:	14746566 / N ~ 0,703%
36:	126183313 / N ~ 6,016%	66:	24530044 / N ~ 1,169%	TJs:	57602534 / N ~ 2,746%
37s:	114627274 / N ~ 5,465%	67s:	106652749 / N ~ 5,085%	TJ:	59642287 / N ~ 2,843%
37:	121002505 / N ~ 5,769%	67:	111965689 / N ~ 5,338%	TQs:	54407652 / N ~ 2,594%
38s:	108693752 / N ~ 5,182%	68s:	101722112 / N ~ 4,850%	TQ:	56357281 / N ~ 2,687%
38:	114693723 / N ~ 5,468%	68:	106737798 / N ~ 5,089%	TKs:	50404375 / N ~ 2,403%
39s:	103094363 / N ~ 4,915%	69s:	95528642 / N ~ 4,554%	TK:	52214074 / N ~ 2,489%
39:	108721395 / N ~ 5,183%	69:	100178053 / N ~ 4,776%	TAs:	46711746 / N ~ 2,227%
3Ts:	97076852 / N ~ 4,628%	6Ts:	89796157 / N ~ 4,281%	TA:	48393949 / N ~ 2,307%
3T:	102334887 / N ~ 4,879%	6T:	94133959 / N ~ 4,488%	JJ:	13277356 / N ~ 0,633%
3Js:	91868379 / N ~ 4,380%	6Js:	85231180 / N ~ 4,063%	JQs:	49852123 / N ~ 2,377%
3J:	96856769 / N ~ 4,618%	6J:	89387379 / N ~ 4,261%	JQ:	51535593 / N ~ 2,457%
3Qs:	87294132 / N ~ 4,162%	6Qs:	81105669 / N ~ 3,867%	JKs:	45759944 / N ~ 2,182%
3Q:	92064087 / N ~ 4,389%	6Q:	85058721 / N ~ 4,055%	JK:	47298240 / N ~ 2,255%
3Ks:	83267308 / N ~ 3,970%	6Ks:	77025547 / N ~ 3,672%	JAs:	41744140 / N ~ 1,990%
3K:	87864179 / N ~ 4,189%	6K:	80805137 / N ~ 3,852%	JA:	43129563 / N ~ 2,056%
3As:	79089680 / N ~ 3,771%	6As:	72447218 / N ~ 3,454%	QQ:	12299076 / N ~ 0,586%
3A:	83453609 / N ~ 3,979%	6A:	76022178 / N ~ 3,624%	QKs:	41615142 / N ~ 1,984%
44:	32147698 / N ~ 1,533%	77:	21423310 / N ~ 1,021%	QK:	42939290 / N ~ 2,047%
45s:	122535513 / N ~ 5,842%	78s:	94484411 / N ~ 4,504%	QAs:	37553414 / N ~ 1,790%
45:	129230044 / N ~ 6,161%	78:	98901298 / N ~ 4,715%	QA:	38723369 / N ~ 1,846%
46s:	119659864 / N ~ 5,705%	79s:	89249246 / N ~ 4,255%	KK:	11676960 / N ~ 0,557%
46:	126168959 / N ~ 6,015%	79:	93373294 / N ~ 4,451%	KAs:	34610976 / N ~ 1,650%
47s:	114963889 / N ~ 5,481%	7Ts:	83391254 / N ~ 3,976%	KA:	35687839 / N ~ 1,701%
47:	121159938 / N ~ 5,776%	7T:	87190712 / N ~ 4,157%	AA:	11402312 / N ~ 0,544%
48s:	109025471 / N ~ 5,198%	7Js:	78462767 / N ~ 3,741%		
48:	114847103 / N ~ 5,475%	7J:	82048768 / N ~ 3,912%		

Gegner: 2 Unentschieden gegen: 0 N: 947053938600

22:	286395585290 / N ~ 30,241%	49s:	253231752768 / N ~ 26,739%	7Qs:	329921652032 / N ~ 34,837%
23s:	213133014945 / N ~ 22,505%	49:	216080704382 / N ~ 22,816%	7Q:	296851015617 / N ~ 31,345%
23:	173973583416 / N ~ 18,370%	4Ts:	269654318339 / N ~ 28,473%	7Ks:	355847801991 / N ~ 37,574%
24s:	220647170448 / N ~ 23,298%	4T:	233218737402 / N ~ 24,626%	7K:	323831798188 / N ~ 34,194%
24:	182022088046 / N ~ 19,220%	4Js:	285591902934 / N ~ 30,156%	7As:	384745310154 / N ~ 40,625%
25s:	227390822487 / N ~ 24,010%	4J:	249648208251 / N ~ 26,361%	7A:	354026428567 / N ~ 37,382%
25:	189180277459 / N ~ 19,976%	4Qs:	304909949920 / N ~ 32,196%	88:	469771524738 / N ~ 49,603%
26s:	221495576742 / N ~ 23,388%	4Q:	269621416703 / N ~ 28,469%	89s:	327039126795 / N ~ 34,532%
26:	182648560813 / N ~ 19,286%	4Ks:	328058052314 / N ~ 34,640%	89:	295590879481 / N ~ 31,212%
27s:	218903542134 / N ~ 23,114%	4K:	293613825225 / N ~ 31,003%	8Ts:	333358407321 / N ~ 35,200%
27:	179625401503 / N ~ 18,967%	4As:	365038561197 / N ~ 38,545%	8T:	301944828711 / N ~ 31,883%
28s:	230103650622 / N ~ 24,297%	4A:	332476592385 / N ~ 35,106%	8Js:	340134529418 / N ~ 35,915%
28:	191271953461 / N ~ 20,197%	55:	375506794146 / N ~ 39,650%	8J:	308581346962 / N ~ 32,583%
29s:	241512070020 / N ~ 25,501%	56s:	272017194552 / N ~ 28,722%	8Qs:	350754495047 / N ~ 37,036%
29:	203070906343 / N ~ 21,442%	56:	237357850583 / N ~ 25,063%	8Q:	319257326311 / N ~ 33,711%
2Ts:	255917275073 / N ~ 27,022%	57s:	270387965040 / N ~ 28,550%	8Ks:	365716084077 / N ~ 38,616%
2T:	218045794866 / N ~ 23,024%	57:	235370708872 / N ~ 24,853%	8K:	334506235501 / N ~ 35,321%
2Js:	271554975606 / N ~ 28,674%	58s:	269660633769 / N ~ 28,474%	8As:	396806762322 / N ~ 41,899%
2J:	234153885167 / N ~ 24,724%	58:	234271208191 / N ~ 24,737%	8A:	367056175966 / N ~ 38,758%
2Qs:	290553179771 / N ~ 30,680%	59s:	270842106054 / N ~ 28,598%	99:	504514740514 / N ~ 53,272%
2Q:	253781860575 / N ~ 26,797%	59:	235143157421 / N ~ 24,829%	9Ts:	353936076471 / N ~ 37,372%
2Ks:	313353473088 / N ~ 33,087%	5Ts:	275325851139 / N ~ 29,072%	9T:	324078621733 / N ~ 34,220%
2K:	277396338565 / N ~ 29,290%	5T:	239517207511 / N ~ 25,291%	9Js:	360845996219 / N ~ 38,102%
2As:	349064456532 / N ~ 36,858%	5Js:	293240433423 / N ~ 30,963%	9J:	330863715993 / N ~ 34,936%
2A:	314882145612 / N ~ 33,249%	5J:	258070529904 / N ~ 27,250%	9Qs:	371926621153 / N ~ 39,272%
33:	314519055970 / N ~ 33,210%	5Qs:	312846754847 / N ~ 33,034%	9Q:	342031732050 / N ~ 36,115%
34s:	236734388214 / N ~ 24,997%	5Q:	278355140918 / N ~ 29,392%	9Ks:	387474031362 / N ~ 40,914%
34:	199441524046 / N ~ 21,059%	5Ks:	336308863614 / N ~ 35,511%	9K:	357902136523 / N ~ 37,791%
35s:	244298094468 / N ~ 25,796%	5K:	302688045514 / N ~ 31,961%	9As:	408268425132 / N ~ 43,109%
35:	207487610352 / N ~ 21,909%	5As:	373704012276 / N ~ 39,460%	9A:	379435491337 / N ~ 40,065%
36s:	238608223266 / N ~ 25,195%	5A:	342000103729 / N ~ 36,112%	TT:	542082525658 / N ~ 57,239%
36:	201176870951 / N ~ 21,242%	66:	405445858888 / N ~ 42,811%	TJs:	385355976683 / N ~ 40,690%
37s:	235882266639 / N ~ 24,907%	67s:	287691739644 / N ~ 30,378%	TJ:	357250357421 / N ~ 37,722%
37:	198008052810 / N ~ 20,908%	67:	253976800858 / N ~ 26,818%	TQs:	396358629923 / N ~ 41,852%
38s:	234979288866 / N ~ 24,812%	68s:	287796390159 / N ~ 30,389%	TQ:	368341731180 / N ~ 38,893%
38:	196721675006 / N ~ 20,772%	68:	253776870995 / N ~ 26,796%	TKs:	412291642979 / N ~ 43,534%
39s:	248238031356 / N ~ 26,212%	69s:	289347924984 / N ~ 30,552%	TK:	384625449945 / N ~ 40,613%
39:	210505430923 / N ~ 22,227%	69:	255045743470 / N ~ 26,930%	TAs:	433633528590 / N ~ 45,788%
3Ts:	262792194353 / N ~ 27,748%	6Ts:	293935701522 / N ~ 31,037%	TA:	406737951786 / N ~ 42,948%
3T:	225638420364 / N ~ 23,825%	6T:	259527108466 / N ~ 27,404%	JJ:	576467890470 / N ~ 60,870%
3Js:	278577245519 / N ~ 29,415%	6Js:	300064991350 / N ~ 31,684%	JQs:	407605603043 / N ~ 43,039%
3J:	241904519754 / N ~ 25,543%	6J:	265475342725 / N ~ 28,032%	JQ:	380417059285 / N ~ 40,168%
3Qs:	297734516339 / N ~ 31,438%	6Qs:	321676498757 / N ~ 33,966%	JKs:	423856051354 / N ~ 44,755%
3Q:	261704310859 / N ~ 27,634%	6Q:	287913080834 / N ~ 30,401%	JK:	397004594968 / N ~ 41,924%
3Ks:	320707758328 / N ~ 33,864%	6Ks:	345459939411 / N ~ 36,477%	JAs:	445701275613 / N ~ 47,062%
3K:	285506874392 / N ~ 30,147%	6K:	312591573673 / N ~ 33,007%	JA:	419689501694 / N ~ 44,315%
3As:	357282544032 / N ~ 37,726%	6As:	372210959142 / N ~ 39,302%	QQ:	612392464716 / N ~ 64,663%
3A:	323929630237 / N ~ 34,204%	6A:	340477477891 / N ~ 35,951%	QKs:	436528727454 / N ~ 46,093%
44:	344252131604 / N ~ 36,350%	77:	436702092138 / N ~ 46,112%	QK:	410625022456 / N ~ 43,358%
45s:	260373735627 / N ~ 27,493%	78s:	305759147505 / N ~ 32,285%	QAs:	458517432768 / N ~ 48,415%
45:	224902240405 / N ~ 23,748%	78:	273098451275 / N ~ 28,837%	QA:	433424758949 / N ~ 45,766%
46s:	255585977199 / N ~ 26,987%	79s:	308208484728 / N ~ 32,544%	KK:	649993373144 / N ~ 68,633%
46:	219563245348 / N ~ 23,184%	79:	275339198591 / N ~ 29,073%	KAs:	471985785006 / N ~ 49,837%
47s:	253067492007 / N ~ 26,722%	7Ts:	313341353028 / N ~ 33,086%	KA:	447830397648 / N ~ 47,287%
47:	216617792621 / N ~ 22,873%	7T:	280407202680 / N ~ 29,608%	AA:	693292278608 / N ~ 73,205%
48s:	252048356433 / N ~ 26,614%	7Js:	319730463963 / N ~ 33,761%		
48:	215204532974 / N ~ 22,724%	7J:	286630048765 / N ~ 30,265%		

Gegner: 2 Unentschieden gegen: 1 N: 947053938600

22:	1614546900 / N ~ 0,170%	49s:	24117681810 / N ~ 2,547%	7Qs:	26353666866 / N ~ 2,783%
23s:	16864119498 / N ~ 1,781%	49:	25373870055 / N ~ 2,679%	7Q:	27866474364 / N ~ 2,942%
23:	17463711140 / N ~ 1,844%	4Ts:	26446792119 / N ~ 2,793%	7Ks:	28134945747 / N ~ 2,971%
24s:	17875793082 / N ~ 1,888%	4T:	27912399762 / N ~ 2,947%	7K:	29789280771 / N ~ 3,145%
24:	18546709409 / N ~ 1,958%	4Js:	27800754330 / N ~ 2,935%	7As:	30176291763 / N ~ 3,186%
25s:	18945622740 / N ~ 2,000%	4J:	29373971496 / N ~ 3,102%	7A:	31997208102 / N ~ 3,379%
25:	19694644706 / N ~ 2,080%	4Qs:	29457044238 / N ~ 3,110%	88:	3678992964 / N ~ 0,388%
26s:	18933440703 / N ~ 1,999%	4Q:	31156652583 / N ~ 3,290%	89s:	21195133404 / N ~ 2,238%
26:	19710243493 / N ~ 2,081%	4Ks:	31351357764 / N ~ 3,310%	89:	22118067028 / N ~ 2,335%
27s:	19880982096 / N ~ 2,099%	4K:	33192175566 / N ~ 3,505%	8Ts:	22325232609 / N ~ 2,357%
27:	20778259002 / N ~ 2,194%	4As:	33972223227 / N ~ 3,587%	8T:	23409366822 / N ~ 2,472%
28s:	21543151566 / N ~ 2,275%	4A:	35977348228 / N ~ 3,799%	8Js:	22941891732 / N ~ 2,422%
28:	22585573083 / N ~ 2,385%	55:	3414401646 / N ~ 0,361%	8J:	24130601942 / N ~ 2,548%
29s:	22919364048 / N ~ 2,420%	56s:	21362305623 / N ~ 2,256%	8Qs:	23913597669 / N ~ 2,525%
29:	24082062489 / N ~ 2,543%	56:	22194390199 / N ~ 2,344%	8Q:	25229205217 / N ~ 2,664%
2Ts:	24785517012 / N ~ 2,617%	57s:	22125150351 / N ~ 2,336%	8Ks:	25285831038 / N ~ 2,670%
2T:	26111933868 / N ~ 2,757%	57:	23068453974 / N ~ 2,436%	8K:	26752859487 / N ~ 2,825%
2Js:	26215204719 / N ~ 2,768%	58s:	23156220027 / N ~ 2,445%	8As:	27487201041 / N ~ 2,902%
2J:	27650702859 / N ~ 2,920%	58:	24241213607 / N ~ 2,560%	8A:	29140149042 / N ~ 3,077%
2Qs:	27943864428 / N ~ 2,951%	59s:	24469346013 / N ~ 2,584%	99:	3764889456 / N ~ 0,398%
2Q:	29506772850 / N ~ 3,116%	59:	25721173594 / N ~ 2,716%	9Ts:	20614152849 / N ~ 2,177%
2Ks:	29913450453 / N ~ 3,159%	5Ts:	26356601976 / N ~ 2,783%	9T:	21558362119 / N ~ 2,276%
2K:	31618412517 / N ~ 3,339%	5T:	27823504656 / N ~ 2,938%	9Js:	20983066884 / N ~ 2,216%
2As:	32616719466 / N ~ 3,444%	5Js:	28143090804 / N ~ 2,972%	9J:	22012191750 / N ~ 2,324%
2A:	34487934058 / N ~ 3,642%	5J:	29757993741 / N ~ 3,142%	9Qs:	21564670566 / N ~ 2,277%
33:	2209292904 / N ~ 0,233%	5Qs:	29686504134 / N ~ 3,135%	9Q:	22694289302 / N ~ 2,396%
34s:	18822039417 / N ~ 1,987%	5Q:	31420516755 / N ~ 3,318%	9Ks:	22417934433 / N ~ 2,367%
34:	19516686027 / N ~ 2,061%	5Ks:	31456647945 / N ~ 3,322%	9K:	23665390003 / N ~ 2,499%
35s:	19884878982 / N ~ 2,100%	5K:	33323779770 / N ~ 3,519%	9As:	24275040120 / N ~ 2,563%
35:	20656966998 / N ~ 2,181%	5As:	33939711402 / N ~ 3,584%	9A:	25723793238 / N ~ 2,716%
36s:	19848227529 / N ~ 2,096%	5A:	35961790471 / N ~ 3,797%	TT:	4068953280 / N ~ 0,430%
36:	20647226492 / N ~ 2,180%	66:	3490717440 / N ~ 0,369%	TJs:	19231272024 / N ~ 2,031%
37s:	20706412908 / N ~ 2,186%	67s:	21735626748 / N ~ 2,295%	TJ:	20112191203 / N ~ 2,124%
37:	21622560415 / N ~ 2,283%	67:	22611469966 / N ~ 2,388%	TQs:	19573131501 / N ~ 2,067%
38s:	21911652228 / N ~ 2,314%	68s:	22617015021 / N ~ 2,388%	TQ:	20534828373 / N ~ 2,168%
38:	22977330465 / N ~ 2,426%	68:	23622857184 / N ~ 2,494%	TKs:	20050400946 / N ~ 2,117%
39s:	23792917881 / N ~ 2,512%	69s:	23739054843 / N ~ 2,507%	TK:	21104862470 / N ~ 2,228%
39:	25025807184 / N ~ 2,642%	69:	24899120975 / N ~ 2,629%	TAs:	21345584451 / N ~ 2,254%
3Ts:	25617479073 / N ~ 2,705%	6Ts:	25391142219 / N ~ 2,681%	TA:	22567283074 / N ~ 2,383%
3T:	27013039440 / N ~ 2,852%	6T:	26751766246 / N ~ 2,825%	JJ:	3538134828 / N ~ 0,374%
3Js:	27008196573 / N ~ 2,852%	6Js:	26708479257 / N ~ 2,820%	JQs:	17405946054 / N ~ 1,838%
3J:	28512084303 / N ~ 3,011%	6J:	28220891934 / N ~ 2,980%	JQ:	18232503663 / N ~ 1,925%
3Qs:	28699682169 / N ~ 3,030%	6Qs:	28576502733 / N ~ 3,017%	JKs:	17641018164 / N ~ 1,863%
3Q:	30330460512 / N ~ 3,203%	6Q:	30239551632 / N ~ 3,193%	JK:	18544611236 / N ~ 1,958%
3Ks:	30630798360 / N ~ 3,234%	6Ks:	30127777767 / N ~ 3,181%	JAs:	18634196616 / N ~ 1,968%
3K:	32403229977 / N ~ 3,421%	6K:	31908243600 / N ~ 3,369%	JA:	19684497181 / N ~ 2,078%
3As:	33291044736 / N ~ 3,515%	6As:	31932160119 / N ~ 3,372%	QQ:	2969403366 / N ~ 0,314%
3A:	35228403607 / N ~ 3,720%	6A:	33852964518 / N ~ 3,575%	QKs:	15243562209 / N ~ 1,610%
44:	2807478702 / N ~ 0,296%	77:	3582239892 / N ~ 0,378%	QK:	16006773200 / N ~ 1,690%
45s:	20781239325 / N ~ 2,194%	78s:	21682414176 / N ~ 2,289%	QAs:	16119234267 / N ~ 1,702%
45:	21575402014 / N ~ 2,278%	78:	22591706635 / N ~ 2,385%	QA:	17024684500 / N ~ 1,798%
46s:	20715914781 / N ~ 2,187%	79s:	22595948568 / N ~ 2,386%	KK:	2399274426 / N ~ 0,253%
46:	21535297497 / N ~ 2,274%	79:	23642530104 / N ~ 2,496%	KAs:	13978889853 / N ~ 1,476%
47s:	21548845863 / N ~ 2,275%	7Ts:	23964482547 / N ~ 2,530%	KA:	14781688669 / N ~ 1,561%
47:	22484595911 / N ~ 2,374%	7T:	25191817787 / N ~ 2,660%	AA:	2353142664 / N ~ 0,248%
48s:	22665272715 / N ~ 2,393%	7Js:	24942915306 / N ~ 2,634%		
48:	23747403847 / N ~ 2,508%	7J:	26299902823 / N ~ 2,777%		

Gegner: 2 Unentschieden gegen: 2 N: 947053938600

22:	9372267582 / N ~ 0,990%	49s:	10070149785 / N ~ 1,063%	7Qs:	6852318450 / N ~ 0,724%
23s:	12516838703 / N ~ 1,322%	49:	10366221696 / N ~ 1,095%	7Q:	6863462538 / N ~ 0,725%
23:	13185811393 / N ~ 1,392%	4Ts:	9082900509 / N ~ 0,959%	7Ks:	5930060616 / N ~ 0,626%
24s:	12446648921 / N ~ 1,314%	4T:	9292185531 / N ~ 0,981%	7K:	5889054144 / N ~ 0,622%
24:	13092867574 / N ~ 1,382%	4Js:	8207431290 / N ~ 0,867%	7As:	4788906903 / N ~ 0,506%
25s:	12363887363 / N ~ 1,306%	4J:	8369099931 / N ~ 0,884%	7A:	4679018973 / N ~ 0,494%
25:	12995439844 / N ~ 1,372%	4Qs:	7290231642 / N ~ 0,770%	88:	4348509060 / N ~ 0,459%
26s:	11984285530 / N ~ 1,265%	4Q:	7406066205 / N ~ 0,782%	89s:	9267013557 / N ~ 0,979%
26:	12584255648 / N ~ 1,329%	4Ks:	6395735328 / N ~ 0,675%	89:	9443028493 / N ~ 0,997%
27s:	11596888102 / N ~ 1,225%	4K:	6471409737 / N ~ 0,683%	8Ts:	8469453009 / N ~ 0,894%
27:	12156657820 / N ~ 1,284%	4As:	5244621018 / N ~ 0,554%	8T:	8576085627 / N ~ 0,906%
28s:	10936550059 / N ~ 1,155%	4A:	5257568524 / N ~ 0,555%	8Js:	7627365600 / N ~ 0,805%
28:	11432133451 / N ~ 1,207%	55:	6517874520 / N ~ 0,688%	8J:	7681706216 / N ~ 0,811%
29s:	10117200897 / N ~ 1,068%	56s:	11791213372 / N ~ 1,245%	8Qs:	6721209588 / N ~ 0,710%
29:	10549062951 / N ~ 1,114%	56:	12212327885 / N ~ 1,290%	8Q:	6723478276 / N ~ 0,710%
2Ts:	9155430372 / N ~ 0,967%	57s:	11459826994 / N ~ 1,210%	8Ks:	5841066963 / N ~ 0,617%
2T:	9512249280 / N ~ 1,004%	57:	11843679349 / N ~ 1,251%	8K:	5797504200 / N ~ 0,612%
2Js:	8279827179 / N ~ 0,874%	58s:	10832086117 / N ~ 1,144%	8As:	4669146855 / N ~ 0,493%
2J:	8588939004 / N ~ 0,907%	58:	11157144642 / N ~ 1,178%	8A:	4544350389 / N ~ 0,480%
2Qs:	7362140316 / N ~ 0,777%	59s:	10014748749 / N ~ 1,057%	99:	3837112992 / N ~ 0,405%
2Q:	7625293476 / N ~ 0,805%	59:	10269323701 / N ~ 1,084%	9Ts:	8142865722 / N ~ 0,860%
2Ks:	6466720359 / N ~ 0,683%	5Ts:	9057402699 / N ~ 0,956%	9T:	8230905814 / N ~ 0,869%
2K:	6689549628 / N ~ 0,706%	5T:	9230445666 / N ~ 0,975%	9Js:	7464596307 / N ~ 0,788%
2As:	5313863946 / N ~ 0,561%	5Js:	8156054058 / N ~ 0,861%	9J:	7512634344 / N ~ 0,793%
2A:	5473753780 / N ~ 0,578%	5J:	8269646592 / N ~ 0,873%	9Qs:	6574424088 / N ~ 0,694%
33:	8341087206 / N ~ 0,881%	5Qs:	7239091011 / N ~ 0,764%	9Q:	6571156742 / N ~ 0,694%
34s:	12400925345 / N ~ 1,309%	5Q:	7306903404 / N ~ 0,772%	9Ks:	5697858864 / N ~ 0,602%
34:	12973933595 / N ~ 1,370%	5Ks:	6345007149 / N ~ 0,670%	9K:	5648611339 / N ~ 0,596%
35s:	12326356154 / N ~ 1,302%	5K:	6372729066 / N ~ 0,673%	9As:	4568653272 / N ~ 0,482%
35:	12881028272 / N ~ 1,360%	5As:	5194541613 / N ~ 0,548%	9A:	4444417362 / N ~ 0,469%
36s:	11946905953 / N ~ 1,261%	5A:	5159624443 / N ~ 0,545%	TT:	3348474546 / N ~ 0,354%
36:	12470035371 / N ~ 1,317%	66:	5550157368 / N ~ 0,586%	TJs:	6935279064 / N ~ 0,732%
37s:	11559285757 / N ~ 1,221%	67s:	11024431441 / N ~ 1,164%	TJ:	6950167066 / N ~ 0,734%
37:	12042221603 / N ~ 1,272%	67:	11357117306 / N ~ 1,199%	TQs:	6363863616 / N ~ 0,672%
38s:	10925705653 / N ~ 1,154%	68s:	10489147867 / N ~ 1,108%	TQ:	6351537597 / N ~ 0,671%
38:	11349376492 / N ~ 1,198%	68:	10769866354 / N ~ 1,137%	TKs:	5517346533 / N ~ 0,583%
39s:	10080911166 / N ~ 1,064%	69s:	9684540555 / N ~ 1,023%	TK:	5460620876 / N ~ 0,577%
39:	10429088622 / N ~ 1,101%	69:	9895703771 / N ~ 1,045%	TAs:	4403707044 / N ~ 0,465%
3Ts:	9119054673 / N ~ 0,963%	6Ts:	8726738997 / N ~ 0,921%	TA:	4272792904 / N ~ 0,451%
3T:	9392220753 / N ~ 0,992%	6T:	8856263503 / N ~ 0,935%	JJ:	3154219560 / N ~ 0,333%
3Js:	8243508261 / N ~ 0,870%	6Js:	7859372433 / N ~ 0,830%	JQs:	6290916639 / N ~ 0,664%
3J:	8469014211 / N ~ 0,894%	6J:	7935088023 / N ~ 0,838%	JQ:	6283862244 / N ~ 0,664%
3Qs:	7326065721 / N ~ 0,774%	6Qs:	6915484947 / N ~ 0,730%	JKs:	5442257232 / N ~ 0,575%
3Q:	7505677977 / N ~ 0,793%	6Q:	6933471519 / N ~ 0,732%	JK:	5390651519 / N ~ 0,569%
3Ks:	6431122422 / N ~ 0,679%	6Ks:	6021774144 / N ~ 0,636%	JAs:	4319798319 / N ~ 0,456%
3K:	6570496611 / N ~ 0,694%	6K:	5999731359 / N ~ 0,634%	JA:	4193229517 / N ~ 0,443%
3As:	5279212233 / N ~ 0,557%	6As:	4906097652 / N ~ 0,518%	QQ:	3083715792 / N ~ 0,326%
3A:	5355759151 / N ~ 0,566%	6A:	4826973378 / N ~ 0,510%	QKs:	5373367443 / N ~ 0,567%
44:	7392076158 / N ~ 0,781%	77:	4923279402 / N ~ 0,520%	QK:	5328026894 / N ~ 0,563%
45s:	12263116751 / N ~ 1,295%	78s:	10243821058 / N ~ 1,082%	QAs:	4249911870 / N ~ 0,449%
45:	12761562723 / N ~ 1,348%	78:	10500677003 / N ~ 1,109%	QA:	4129574554 / N ~ 0,436%
46s:	11906389204 / N ~ 1,257%	79s:	9562504800 / N ~ 1,010%	KK:	3112601184 / N ~ 0,329%
46:	12372167092 / N ~ 1,306%	79:	9759522735 / N ~ 1,031%	KAs:	4217911413 / N ~ 0,445%
47s:	11521205479 / N ~ 1,217%	7Ts:	8626314642 / N ~ 0,911%	KA:	4108002871 / N ~ 0,434%
47:	11947013715 / N ~ 1,261%	7T:	8743239974 / N ~ 0,923%	AA:	3007657158 / N ~ 0,318%
48s:	10887624871 / N ~ 1,150%	7Js:	7757657379 / N ~ 0,819%		
48:	11254194272 / N ~ 1,188%	7J:	7820481808 / N ~ 0,826%		

Gegner: 3 Unentschieden gegen: 0 N: 258861409884000

22:	56106703446722 / N ~ 21,674%	49s:	51778132259637 / N ~ 20,002%	7Qs:	67899937002972 / N ~ 26,230%
23s:	44433027986883 / N ~ 17,165%	49:	41120915591226 / N ~ 15,885%	7Q:	57953641013466 / N ~ 22,388%
23:	33483644109394 / N ~ 12,935%	4Ts:	55070592366909 / N ~ 21,274%	7Ks:	73388025011970 / N ~ 28,350%
24s:	46151397785733 / N ~ 17,829%	4T:	44495252878543 / N ~ 17,189%	7K:	63554461509670 / N ~ 24,552%
24:	35337641149459 / N ~ 13,651%	4Js:	58188999438465 / N ~ 22,479%	7As:	79423630757364 / N ~ 30,682%
25s:	47601124477329 / N ~ 18,389%	4J:	47624811402711 / N ~ 18,398%	7A:	69736924754211 / N ~ 26,940%
25:	36879493282129 / N ~ 14,247%	4Qs:	62076253640416 / N ~ 23,980%	88:	96471344339378 / N ~ 37,268%
26s:	45845736497214 / N ~ 17,711%	4Q:	51546722487954 / N ~ 19,913%	89s:	70335429121758 / N ~ 27,171%
26:	34941831583977 / N ~ 13,498%	4Ks:	66915290031175 / N ~ 25,850%	89:	61231034954670 / N ~ 23,654%
27s:	44817462837681 / N ~ 17,313%	4K:	56454103104562 / N ~ 21,809%	8Ts:	71260614277572 / N ~ 27,528%
27:	33764932819683 / N ~ 13,044%	4As:	75325479322845 / N ~ 29,099%	8T:	62073734083258 / N ~ 23,980%
28s:	47006090502915 / N ~ 18,159%	4A:	65198112640919 / N ~ 25,186%	8Js:	71875214835903 / N ~ 27,766%
28:	36001765044606 / N ~ 13,908%	55:	73874361872736 / N ~ 28,538%	8J:	62516126839360 / N ~ 24,150%
29s:	49242335541558 / N ~ 19,023%	56s:	57968126804028 / N ~ 22,393%	8Qs:	73353363458010 / N ~ 28,337%
29:	38263548519774 / N ~ 14,781%	56:	48132087734046 / N ~ 18,594%	8Q:	63850222465316 / N ~ 24,666%
2Ts:	52161161543856 / N ~ 20,150%	57s:	57255832602018 / N ~ 22,118%	8Ks:	75922107390600 / N ~ 29,329%
2T:	41239305362440 / N ~ 15,931%	57:	47296801018944 / N ~ 18,271%	8K:	66317987656243 / N ~ 25,619%
2Js:	55199270494065 / N ~ 21,324%	58s:	56511310965510 / N ~ 21,831%	8As:	82496118583677 / N ~ 31,869%
2J:	44284381249296 / N ~ 17,107%	58:	46396574259439 / N ~ 17,923%	8A:	73076636474217 / N ~ 28,230%
2Qs:	59001651468654 / N ~ 22,793%	59s:	56047921167207 / N ~ 21,652%	99:	105662842499528 / N ~ 40,818%
2Q:	48116482180446 / N ~ 18,588%	59:	45768463151123 / N ~ 17,681%	9Ts:	76808080925712 / N ~ 29,672%
2Ks:	63744843076128 / N ~ 24,625%	5Ts:	56357253298956 / N ~ 21,771%	9T:	68079127727260 / N ~ 26,299%
2K:	52921624605934 / N ~ 20,444%	5T:	45948814926973 / N ~ 17,750%	9Js:	77506622807481 / N ~ 29,941%
2As:	71623560120906 / N ~ 27,669%	5Js:	59834714952993 / N ~ 23,115%	9J:	68611464531651 / N ~ 26,505%
2A:	61092209508696 / N ~ 23,600%	5J:	49462575283362 / N ~ 19,108%	9Qs:	79123794997167 / N ~ 30,566%
33:	61323976991482 / N ~ 23,690%	5Qs:	63791798705373 / N ~ 24,643%	9Q:	70092689740369 / N ~ 27,077%
34s:	49873628315301 / N ~ 19,267%	5Q:	53458769167536 / N ~ 20,652%	9Ks:	81845081206827 / N ~ 31,617%
34:	39385090512783 / N ~ 15,215%	5Ks:	68712521493075 / N ~ 26,544%	9K:	72720521064096 / N ~ 28,092%
35s:	51654994249332 / N ~ 19,955%	5K:	58453515485332 / N ~ 22,581%	9As:	85584059948793 / N ~ 33,062%
35:	41284871804988 / N ~ 15,949%	5As:	77271989565996 / N ~ 29,851%	9A:	76433966663625 / N ~ 29,527%
36s:	49955728491510 / N ~ 19,298%	5A:	67357166568740 / N ~ 26,021%	TT:	116109735921014 / N ~ 44,854%
36:	39408459355223 / N ~ 15,224%	66:	80727390255326 / N ~ 31,186%	TJs:	84478129677279 / N ~ 32,635%
37s:	48837018294213 / N ~ 18,866%	67s:	61463527939944 / N ~ 23,744%	TJ:	76160905057199 / N ~ 29,421%
37:	38134870980842 / N ~ 14,732%	67:	51851152891152 / N ~ 20,030%	TQs:	86164408100962 / N ~ 33,286%
38s:	48084039435000 / N ~ 18,575%	68s:	61054125192864 / N ~ 23,586%	TQ:	77716602035918 / N ~ 30,022%
38:	37225247119857 / N ~ 14,380%	68:	51312085266813 / N ~ 19,822%	TKs:	89024176373902 / N ~ 34,391%
39s:	50641721270124 / N ~ 19,563%	69s:	60707235149595 / N ~ 23,452%	TK:	80491365519682 / N ~ 31,094%
39:	39830561774199 / N ~ 15,387%	69:	50808520310482 / N ~ 19,628%	TAs:	92920129837029 / N ~ 35,896%
3Ts:	53602048507941 / N ~ 20,707%	6Ts:	61001877469725 / N ~ 23,565%	TA:	84369510799347 / N ~ 32,593%
3T:	42849817760791 / N ~ 16,553%	6T:	50971655331318 / N ~ 19,691%	JJ:	126492851924084 / N ~ 48,865%
3Js:	56679512039349 / N ~ 21,896%	6Js:	61491646397805 / N ~ 23,755%	JQs:	89441358288575 / N ~ 34,552%
3J:	45936284208786 / N ~ 17,746%	6J:	51283956748971 / N ~ 19,811%	JQ:	81269797518935 / N ~ 31,395%
3Qs:	60523866934772 / N ~ 23,381%	6Qs:	65846362964514 / N ~ 25,437%	JKs:	92433204338387 / N ~ 35,708%
3Q:	49812811800027 / N ~ 19,243%	6Q:	55705181381370 / N ~ 21,519%	JK:	84185625525867 / N ~ 32,522%
3Ks:	65314668602330 / N ~ 25,232%	6Ks:	70863456191457 / N ~ 27,375%	JAs:	96497696959041 / N ~ 37,278%
3K:	54668764109056 / N ~ 21,119%	6K:	60801972666535 / N ~ 23,488%	JA:	88242782417162 / N ~ 34,089%
3As:	73555292290950 / N ~ 28,415%	6As:	76357875827370 / N ~ 29,498%	QQ:	137823144759832 / N ~ 53,242%
3A:	63230476782284 / N ~ 24,426%	6A:	66403890037686 / N ~ 25,652%	QKs:	96335245504665 / N ~ 37,215%
44:	67247717436590 / N ~ 25,978%	77:	88155910624676 / N ~ 34,055%	QK:	88405762227283 / N ~ 34,152%
45s:	55430156271981 / N ~ 21,413%	78s:	65532499417962 / N ~ 25,316%	QAs:	100490042527830 / N ~ 38,820%
45:	45395531869163 / N ~ 17,537%	78:	56160802820691 / N ~ 21,695%	QA:	92558574960710 / N ~ 35,756%
46s:	54068496576399 / N ~ 20,887%	79s:	65535047680161 / N ~ 25,317%	KK:	150167889051772 / N ~ 58,011%
46:	43883034216469 / N ~ 16,952%	79:	56033969813352 / N ~ 21,646%	KAs:	104924135261847 / N ~ 40,533%
47s:	53018679309531 / N ~ 20,481%	7Ts:	65992362869796 / N ~ 25,493%	KA:	97342681963741 / N ~ 37,604%
47:	42684113412532 / N ~ 16,489%	7T:	56371372666985 / N ~ 21,777%	AA:	164654090109902 / N ~ 63,607%
48s:	52184877317067 / N ~ 20,159%	7Js:	66506506084950 / N ~ 25,692%		
48:	41687836133633 / N ~ 16,104%	7J:	56707761528656 / N ~ 21,907%		

Gegner: 3 Unentschieden gegen: 1 N: 258861409884000

22:	450976984008 / N ~	0,174%	49s:	5964027145323 / N ~	2,304%	7Qs:	6717530101812 / N ~	2,595%
23s:	41113335588374 / N ~	1,588%	49:	6265915073461 / N ~	2,421%	7Q:	7078901244736 / N ~	2,735%
23:	4263224216971 / N ~	1,647%	4Ts:	6553153931052 / N ~	2,532%	7Ks:	7321999802034 / N ~	2,829%
24s:	4490847542817 / N ~	1,735%	4T:	6903340024625 / N ~	2,667%	7K:	7720676399669 / N ~	2,983%
24:	4669418206353 / N ~	1,804%	4Js:	6790091504415 / N ~	2,623%	7As:	8129929834686 / N ~	3,141%
25s:	4864624298040 / N ~	1,879%	4J:	7150585704439 / N ~	2,762%	7A:	8580035008637 / N ~	3,315%
25:	5069917033988 / N ~	1,959%	4Qs:	7207481003544 / N ~	2,784%	88:	1212378503706 / N ~	0,468%
26s:	4776756143367 / N ~	1,845%	4Q:	7589665918341 / N ~	2,932%	89s:	5733254905161 / N ~	2,215%
26:	4981938931205 / N ~	1,925%	4Ks:	7817949940302 / N ~	3,020%	89:	5970663616468 / N ~	2,307%
27s:	4955208196002 / N ~	1,914%	4K:	8233260469485 / N ~	3,181%	8Ts:	6011747597355 / N ~	2,322%
27:	5184265532164 / N ~	2,003%	4As:	8825584395522 / N ~	3,409%	8T:	6291299507815 / N ~	2,430%
28s:	5269215890793 / N ~	2,036%	4A:	9290465041514 / N ~	3,589%	8Js:	6047358633675 / N ~	2,336%
28:	5520959944940 / N ~	2,133%	55:	1133374016562 / N ~	0,438%	8J:	6342589381662 / N ~	2,450%
29s:	5486654000454 / N ~	2,120%	56s:	5761979034261 / N ~	2,226%	8Qs:	6253129281432 / N ~	2,416%
29:	5752412794027 / N ~	2,222%	56:	5994618766600 / N ~	2,316%	8Q:	6574706553593 / N ~	2,540%
2Ts:	5939716837626 / N ~	2,295%	57s:	5863015859973 / N ~	2,265%	8Ks:	6679332667707 / N ~	2,580%
2T:	6240480967017 / N ~	2,411%	57:	6116079505399 / N ~	2,363%	8K:	7039803256681 / N ~	2,720%
2Js:	6201648695007 / N ~	2,396%	58s:	5977360248618 / N ~	2,309%	8As:	7538845843605 / N ~	2,912%
2J:	6513298484559 / N ~	2,516%	58:	6253748419919 / N ~	2,416%	8A:	7957739192093 / N ~	3,074%
2Qs:	6643383140655 / N ~	2,566%	59s:	6161111817792 / N ~	2,380%	99:	1248207659406 / N ~	0,482%
2Q:	6977059738551 / N ~	2,695%	59:	6466622544511 / N ~	2,498%	9Ts:	5738333350461 / N ~	2,217%
2Ks:	7279925830488 / N ~	2,812%	5Ts:	6617511554856 / N ~	2,556%	9T:	5989805404732 / N ~	2,314%
2K:	7646869296291 / N ~	2,954%	5T:	6974895056230 / N ~	2,694%	9Js:	5716298939295 / N ~	2,208%
2As:	8312100133986 / N ~	3,211%	5Js:	6995020264131 / N ~	2,702%	9J:	5979785535530 / N ~	2,310%
2A:	8728837281639 / N ~	3,372%	5J:	7375795237295 / N ~	2,849%	9Qs:	5817511048776 / N ~	2,247%
33:	676041325620 / N ~	0,261%	5Qs:	7386750857760 / N ~	2,854%	9Q:	6101224655914 / N ~	2,357%
34s:	4851927954654 / N ~	1,874%	5Q:	7788037426897 / N ~	3,009%	9Ks:	6080539740762 / N ~	2,349%
34:	5041108664587 / N ~	1,947%	5Ks:	7966339535340 / N ~	3,077%	9K:	6394155002423 / N ~	2,470%
35s:	5226644524419 / N ~	2,019%	5K:	8399294987964 / N ~	3,245%	9As:	6764067165582 / N ~	2,613%
35:	5442293952291 / N ~	2,102%	5As:	8938689848526 / N ~	3,453%	9A:	7138475455230 / N ~	2,758%
36s:	5122196896794 / N ~	1,979%	5A:	9419410750364 / N ~	3,639%	TT:	1420094691006 / N ~	0,549%
36:	5337014263903 / N ~	2,062%	66:	1155315262734 / N ~	0,446%	TJs:	5499514857414 / N ~	2,125%
37s:	5251257695226 / N ~	2,029%	67s:	5857347499656 / N ~	2,263%	TJ:	5736363884420 / N ~	2,216%
37:	5487973540994 / N ~	2,120%	67:	6093876764881 / N ~	2,354%	TQs:	5533274842542 / N ~	2,138%
38s:	5443479611853 / N ~	2,103%	68s:	5949352801959 / N ~	2,298%	TQ:	5785869459357 / N ~	2,235%
38:	5706725651860 / N ~	2,205%	68:	6207807745408 / N ~	2,398%	TKs:	5682732678561 / N ~	2,195%
39s:	5806946930781 / N ~	2,243%	69s:	6086519941971 / N ~	2,351%	TK:	5958530976131 / N ~	2,302%
39:	6097714707917 / N ~	2,356%	69:	6371833087697 / N ~	2,461%	TAs:	6167405833599 / N ~	2,383%
3Ts:	6246747988224 / N ~	2,413%	6Ts:	6467963837046 / N ~	2,499%	TA:	6493170446756 / N ~	2,508%
3T:	6572110854820 / N ~	2,539%	6T:	6801612108139 / N ~	2,628%	JJ:	1241337307194 / N ~	0,480%
3Js:	6495531064497 / N ~	2,509%	6Js:	6692128047132 / N ~	2,585%	JQs:	4985500708806 / N ~	1,926%
3J:	6831453889977 / N ~	2,639%	6J:	7051639855099 / N ~	2,724%	JQ:	5204293562830 / N ~	2,010%
3Qs:	6924503557071 / N ~	2,675%	6Qs:	7197834725562 / N ~	2,781%	JKs:	5056062911730 / N ~	1,953%
3Q:	7282252515360 / N ~	2,813%	6Q:	7589050405610 / N ~	2,932%	JK:	5293450577625 / N ~	2,045%
3Ks:	7547199192063 / N ~	2,916%	6Ks:	7717988127732 / N ~	2,982%	JAs:	5451955564404 / N ~	2,106%
3K:	7938098099547 / N ~	3,067%	6K:	8137382483131 / N ~	3,144%	JA:	5734110106850 / N ~	2,215%
3As:	8566158927969 / N ~	3,309%	6As:	8458348062150 / N ~	3,268%	QQ:	1049449642956 / N ~	0,405%
3A:	9006505671699 / N ~	3,479%	6A:	8920458215274 / N ~	3,446%	QKs:	4396102525671 / N ~	1,698%
44:	904051091538 / N ~	0,349%	77:	1181251140858 / N ~	0,456%	QK:	4594927038928 / N ~	1,775%
45s:	5581246020204 / N ~	2,156%	78s:	5831259128610 / N ~	2,253%	QAs:	4740754753494 / N ~	1,831%
45:	5807327893448 / N ~	2,243%	78:	6068686657636 / N ~	2,344%	QA:	4982459273214 / N ~	1,925%
46s:	5469668011614 / N ~	2,113%	79s:	5937615911319 / N ~	2,294%	KK:	849397787172 / N ~	0,328%
46:	5694357736625 / N ~	2,200%	79:	6199841828623 / N ~	2,395%	KAs:	4062371333193 / N ~	1,569%
47s:	5581881429813 / N ~	2,156%	7Ts:	6256656780204 / N ~	2,417%	KA:	4269281633184 / N ~	1,649%
47:	5827767150021 / N ~	2,251%	7T:	6563882621978 / N ~	2,536%	AA:	816389166480 / N ~	0,315%
48s:	5724897191808 / N ~	2,212%	7Js:	6380051232975 / N ~	2,465%			
48:	5995357118659 / N ~	2,316%	7J:	6707954878180 / N ~	2,591%			

Gegner: 3 Unentschieden gegen: 2 N: 258861409884000

22:	16694378184 / N ~	0,006%	49s:	387688908852 / N ~	0,150%	7Qs:	475909218594 / N ~	0,184%
23s:	218755420182 / N ~	0,085%	49:	415244209716 / N ~	0,160%	7Q:	510457376310 / N ~	0,197%
23:	228865546254 / N ~	0,088%	4Ts:	452751688926 / N ~	0,175%	7Ks:	520913593026 / N ~	0,201%
24s:	245781422028 / N ~	0,095%	4T:	486222589296 / N ~	0,188%	7K:	558729339324 / N ~	0,216%
24:	258237127770 / N ~	0,100%	4Js:	473902664598 / N ~	0,183%	7As:	576084902616 / N ~	0,223%
25s:	273067890264 / N ~	0,105%	4J:	508669005948 / N ~	0,197%	7A:	618043986570 / N ~	0,239%
25:	287932960752 / N ~	0,111%	4Qs:	503017518042 / N ~	0,194%	88:	46217600736 / N ~	0,018%
26s:	266295710430 / N ~	0,103%	4Q:	539567427480 / N ~	0,208%	89s:	340287768540 / N ~	0,131%
26:	281711887758 / N ~	0,109%	4Ks:	538659712062 / N ~	0,208%	89:	357956084436 / N ~	0,138%
27s:	289723231080 / N ~	0,112%	4K:	577357828128 / N ~	0,223%	8Ts:	385652569482 / N ~	0,149%
27:	308585741976 / N ~	0,119%	4As:	595547011188 / N ~	0,230%	8T:	408985730010 / N ~	0,158%
28s:	327572974206 / N ~	0,127%	4A:	636885607116 / N ~	0,246%	8Js:	404350958214 / N ~	0,156%
28:	349869160500 / N ~	0,135%	55:	44951345808 / N ~	0,017%	8J:	430499616798 / N ~	0,166%
29s:	354994644456 / N ~	0,137%	56s:	317040844266 / N ~	0,122%	8Qs:	431684867646 / N ~	0,167%
29:	379606981356 / N ~	0,147%	56:	332415333282 / N ~	0,128%	8Q:	461210935416 / N ~	0,178%
2Ts:	402797255094 / N ~	0,156%	57s:	336657677355 / N ~	0,130%	8Ks:	469364763798 / N ~	0,181%
2T:	431574121260 / N ~	0,167%	57:	355247411751 / N ~	0,137%	8K:	502918745736 / N ~	0,194%
2Js:	425457022122 / N ~	0,164%	58s:	363850691040 / N ~	0,141%	8As:	536412421620 / N ~	0,207%
2J:	455565131238 / N ~	0,176%	58:	386414753478 / N ~	0,149%	8A:	575362637538 / N ~	0,222%
2Qs:	456334450884 / N ~	0,176%	59s:	399347818434 / N ~	0,154%	99:	46951535616 / N ~	0,018%
2Q:	488260008978 / N ~	0,189%	59:	426591611016 / N ~	0,165%	9Ts:	351363355434 / N ~	0,136%
2Ks:	494137260648 / N ~	0,191%	5Ts:	457260206904 / N ~	0,177%	9T:	370570928772 / N ~	0,143%
2K:	528247519818 / N ~	0,204%	5T:	491157479628 / N ~	0,190%	9Js:	365182459497 / N ~	0,141%
2As:	553811209992 / N ~	0,214%	5Js:	495718950996 / N ~	0,191%	9J:	386789612049 / N ~	0,149%
2A:	590655859260 / N ~	0,228%	5J:	532624492542 / N ~	0,206%	9Qs:	384919605594 / N ~	0,149%
33:	26067473712 / N ~	0,010%	5Qs:	523460916558 / N ~	0,202%	9Q:	409325545020 / N ~	0,158%
34s:	263737352700 / N ~	0,102%	5Q:	562075226130 / N ~	0,217%	9Ks:	411853426182 / N ~	0,159%
34:	276249164442 / N ~	0,107%	5Ks:	557492356728 / N ~	0,215%	9K:	439511612208 / N ~	0,170%
35s:	290835551844 / N ~	0,112%	5K:	598171748706 / N ~	0,231%	9As:	472623455610 / N ~	0,183%
35:	305714113554 / N ~	0,118%	5As:	612433509444 / N ~	0,237%	9A:	506541011568 / N ~	0,196%
36s:	283283723304 / N ~	0,109%	5A:	655655168292 / N ~	0,253%	TT:	53026813032 / N ~	0,020%
36:	298668332508 / N ~	0,115%	66:	45143522952 / N ~	0,017%	TJs:	330373179261 / N ~	0,128%
37s:	304276922136 / N ~	0,118%	67s:	327030168627 / N ~	0,126%	TJ:	347437637301 / N ~	0,134%
37:	322990674402 / N ~	0,125%	67:	343151865003 / N ~	0,133%	TQs:	344620869894 / N ~	0,133%
38s:	335084729220 / N ~	0,129%	68s:	352529745084 / N ~	0,136%	TQ:	364016861370 / N ~	0,141%
38:	357959478678 / N ~	0,138%	68:	372457438272 / N ~	0,144%	TKs:	363146524866 / N ~	0,140%
39s:	380540674800 / N ~	0,147%	69s:	385700307912 / N ~	0,149%	TK:	385171533258 / N ~	0,149%
39:	407505872916 / N ~	0,157%	69:	410135118702 / N ~	0,158%	TAs:	411100397010 / N ~	0,159%
3Ts:	427670044254 / N ~	0,165%	6Ts:	439372295082 / N ~	0,170%	TA:	438512838192 / N ~	0,169%
3T:	458780026362 / N ~	0,177%	6T:	470194743504 / N ~	0,182%	JJ:	43524005208 / N ~	0,017%
3Js:	449542594134 / N ~	0,174%	6Js:	470136803490 / N ~	0,182%	JQs:	289724067000 / N ~	0,112%
3J:	481964607996 / N ~	0,186%	6J:	504665332626 / N ~	0,195%	JQ:	304845286266 / N ~	0,118%
3Qs:	479492498988 / N ~	0,185%	6Qs:	513657714852 / N ~	0,198%	JKs:	302350965930 / N ~	0,117%
3Q:	513713076024 / N ~	0,198%	6Q:	551470613130 / N ~	0,213%	JK:	319669608564 / N ~	0,123%
3Ks:	516155903712 / N ~	0,199%	6Ks:	544790010708 / N ~	0,210%	JAs:	342680676534 / N ~	0,132%
3K:	552540845448 / N ~	0,213%	6K:	584460731304 / N ~	0,226%	JA:	364807119126 / N ~	0,141%
3As:	574304084784 / N ~	0,222%	6As:	585882574146 / N ~	0,226%	QQ:	33247139808 / N ~	0,013%
3A:	613355008236 / N ~	0,237%	6A:	628222464246 / N ~	0,243%	QKs:	238720824810 / N ~	0,092%
44:	35485642896 / N ~	0,014%	77:	45564819000 / N ~	0,018%	QK:	251402475912 / N ~	0,097%
45s:	308622733164 / N ~	0,119%	78s:	335680602660 / N ~	0,130%	QAs:	276343660782 / N ~	0,107%
45:	323553163098 / N ~	0,125%	78:	352675101792 / N ~	0,136%	QA:	293721149898 / N ~	0,113%
46s:	300643875324 / N ~	0,116%	79s:	365866367364 / N ~	0,141%	KK:	22722110688 / N ~	0,009%
46:	316029196344 / N ~	0,122%	79:	387079876158 / N ~	0,150%	KAs:	220140253944 / N ~	0,085%
47s:	320941854720 / N ~	0,124%	7Ts:	415496259612 / N ~	0,161%	KA:	234104821230 / N ~	0,090%
47:	339619004052 / N ~	0,131%	7T:	442776813552 / N ~	0,171%	AA:	21232155264 / N ~	0,008%
48s:	349214233014 / N ~	0,135%	7Js:	440223656076 / N ~	0,170%			
48:	371932222350 / N ~	0,144%	7J:	470792101752 / N ~	0,182%			

Gegner: 3 Unentschieden gegen: 3 N: 258861409884000

22:	1690122409134 / N ~ 0,653%	49s:	1536407167167 / N ~ 0,594%	7Qs:	1172383779582 / N ~ 0,453%
23s:	1759923861363 / N ~ 0,680%	49:	1563159140154 / N ~ 0,604%	7Q:	1159760922174 / N ~ 0,448%
23:	1839762479418 / N ~ 0,711%	4Ts:	1436649223917 / N ~ 0,555%	7Ks:	1025958131709 / N ~ 0,396%
24s:	1737548580207 / N ~ 0,671%	4T:	1451828392779 / N ~ 0,561%	7K:	1005339721440 / N ~ 0,388%
24:	1812014756823 / N ~ 0,700%	4Js:	1351938829890 / N ~ 0,522%	7As:	819272765208 / N ~ 0,316%
25s:	1716206927775 / N ~ 0,663%	4J:	1363884177636 / N ~ 0,527%	7A:	786336229638 / N ~ 0,304%
25:	1787351418228 / N ~ 0,690%	4Qs:	1236570936303 / N ~ 0,478%	88:	876416595408 / N ~ 0,339%
26s:	1664302604049 / N ~ 0,643%	4Q:	1243986497049 / N ~ 0,481%	89s:	1446065841795 / N ~ 0,559%
26:	1731037083570 / N ~ 0,669%	4Ks:	1101463632879 / N ~ 0,426%	89:	1455395231466 / N ~ 0,562%
27s:	1647841119885 / N ~ 0,637%	4K:	1103977668231 / N ~ 0,426%	8Ts:	1370526045141 / N ~ 0,529%
27:	1711418038746 / N ~ 0,661%	4As:	894271770432 / N ~ 0,345%	8T:	1370371871226 / N ~ 0,529%
28s:	1605487737939 / N ~ 0,620%	4A:	886436806536 / N ~ 0,342%	8Js:	1287634129953 / N ~ 0,497%
28:	1663422604278 / N ~ 0,643%	55:	1220121848022 / N ~ 0,471%	8J:	1282391788932 / N ~ 0,495%
29s:	1552978602843 / N ~ 0,600%	56s:	1624812351153 / N ~ 0,628%	8Qs:	1171925642139 / N ~ 0,453%
29:	1606698623172 / N ~ 0,621%	56:	1657646312094 / N ~ 0,640%	8Q:	1160135683668 / N ~ 0,448%
2Ts:	1465153132740 / N ~ 0,566%	57s:	1610044466832 / N ~ 0,622%	8Ks:	1036013374293 / N ~ 0,400%
2T:	1510432425765 / N ~ 0,583%	57:	1639361919609 / N ~ 0,633%	8K:	1017278490726 / N ~ 0,393%
2Js:	1380226704693 / N ~ 0,533%	58s:	1578126219543 / N ~ 0,610%	8As:	817513897884 / N ~ 0,316%
2J:	1422258069768 / N ~ 0,549%	58:	1602847989402 / N ~ 0,619%	8A:	783334421364 / N ~ 0,303%
2Qs:	1264475144292 / N ~ 0,488%	59s:	1523934630594 / N ~ 0,589%	99:	798295150182 / N ~ 0,308%
2Q:	1301952060387 / N ~ 0,503%	59:	1542340860588 / N ~ 0,596%	9Ts:	1347128937993 / N ~ 0,520%
2Ks:	1128735278199 / N ~ 0,436%	5Ts:	1434507164205 / N ~ 0,554%	9T:	1347082569837 / N ~ 0,520%
2K:	1161270449529 / N ~ 0,449%	5T:	1442377342143 / N ~ 0,557%	9Js:	1282042941429 / N ~ 0,495%
2As:	920556119820 / N ~ 0,356%	5Js:	1337855229306 / N ~ 0,517%	9J:	1278201646377 / N ~ 0,494%
2A:	942680209254 / N ~ 0,364%	5J:	1339358716722 / N ~ 0,517%	9Qs:	1169353370454 / N ~ 0,452%
33:	1521961765152 / N ~ 0,588%	5Qs:	1222659128511 / N ~ 0,472%	9Q:	1159140595167 / N ~ 0,448%
34s:	1724124643632 / N ~ 0,666%	5Q:	1219643866185 / N ~ 0,471%	9Ks:	1035599999613 / N ~ 0,400%
34:	1784947434678 / N ~ 0,690%	5Ks:	1087827125241 / N ~ 0,420%	9K:	1018571621748 / N ~ 0,393%
35s:	1703655932364 / N ~ 0,658%	5K:	1079927846175 / N ~ 0,417%	9As:	827659389524 / N ~ 0,320%
35:	1760294413827 / N ~ 0,680%	5As:	881054282220 / N ~ 0,340%	9A:	796218390492 / N ~ 0,308%
36s:	1651693351269 / N ~ 0,638%	5A:	862832451936 / N ~ 0,333%	TT:	703384199340 / N ~ 0,272%
36:	1703918257395 / N ~ 0,658%	66:	1054727013732 / N ~ 0,407%	TJs:	1217322095994 / N ~ 0,470%
37s:	1635233049732 / N ~ 0,632%	67s:	1546457540997 / N ~ 0,597%	TJ:	1210731405630 / N ~ 0,468%
37:	1684300534536 / N ~ 0,651%	67:	1567664804277 / N ~ 0,606%	TQs:	1149592783068 / N ~ 0,444%
38s:	1603171765293 / N ~ 0,619%	68s:	1518619815462 / N ~ 0,587%	TQ:	1139936657058 / N ~ 0,440%
38:	1647631616220 / N ~ 0,636%	68:	1535290045860 / N ~ 0,593%	TKs:	1022252929341 / N ~ 0,395%
39s:	1538642010834 / N ~ 0,594%	69s:	1465034594565 / N ~ 0,566%	TK:	1006150341666 / N ~ 0,389%
39:	1575749045814 / N ~ 0,609%	69:	1475437328940 / N ~ 0,570%	TAs:	818865293592 / N ~ 0,316%
3Ts:	1450871759376 / N ~ 0,560%	6Ts:	1375728471630 / N ~ 0,531%	TA:	788646712296 / N ~ 0,305%
3T:	1479541768167 / N ~ 0,572%	6T:	1375602656292 / N ~ 0,531%	JJ:	674137420128 / N ~ 0,260%
3Js:	1366055626923 / N ~ 0,528%	6Js:	1289457371583 / N ~ 0,498%	JQs:	1159653299442 / N ~ 0,448%
3J:	1391484914388 / N ~ 0,538%	6J:	1284005360115 / N ~ 0,496%	JQ:	1153186110636 / N ~ 0,445%
3Qs:	1250502148458 / N ~ 0,483%	6Qs:	1162373178882 / N ~ 0,449%	JKs:	1032300205755 / N ~ 0,399%
3Q:	1271389721277 / N ~ 0,491%	6Q:	1149272701050 / N ~ 0,444%	JK:	1019385354612 / N ~ 0,394%
3Ks:	1115091626151 / N ~ 0,431%	6Ks:	1027786719471 / N ~ 0,397%	JAs:	828842726964 / N ~ 0,320%
3K:	1131058392363 / N ~ 0,437%	6K:	1009817842464 / N ~ 0,390%	JA:	801805224708 / N ~ 0,310%
3As:	907430205300 / N ~ 0,351%	6As:	832834749780 / N ~ 0,322%	QQ:	662849856576 / N ~ 0,256%
3A:	913018411458 / N ~ 0,353%	6A:	805667806878 / N ~ 0,311%	QKs:	1042323333219 / N ~ 0,403%
44:	1365201111822 / N ~ 0,527%	77:	961611671286 / N ~ 0,371%	QK:	1032600491244 / N ~ 0,399%
45s:	1690225936575 / N ~ 0,653%	78s:	1508213902971 / N ~ 0,583%	QAs:	838862690064 / N ~ 0,324%
45:	1736127497904 / N ~ 0,671%	78:	1523629653849 / N ~ 0,589%	QA:	815017029984 / N ~ 0,315%
46s:	1639137091935 / N ~ 0,633%	79s:	1462585476489 / N ~ 0,565%	KK:	670744791288 / N ~ 0,259%
46:	1679970290709 / N ~ 0,649%	79:	1472273064507 / N ~ 0,569%	KAs:	849250910364 / N ~ 0,328%
47s:	1622687291250 / N ~ 0,627%	7Ts:	1374933999870 / N ~ 0,531%	KA:	828640245804 / N ~ 0,320%
47:	1660364181822 / N ~ 0,641%	7T:	1374218800446 / N ~ 0,531%	AA:	645799800888 / N ~ 0,249%
48s:	1590634646541 / N ~ 0,614%	7Js:	1289019804885 / N ~ 0,498%		
48:	1623704571504 / N ~ 0,627%	7J:	1282999736055 / N ~ 0,496%		

Gegner: 4 Unentschieden gegen: 0 N: 47954076181011000

22:	8412298939164924 / N ~ 17,542%	49s:	7692698408539800 / N ~ 16,042%	7Qs:	10141322941422066 / N ~ 21,148%
23s:	6808206563160327 / N ~ 14,197%	49:	7685536831268585 / N ~ 11,856%	7Q:	8216725038321711 / N ~ 17,135%
23:	4787787170250195 / N ~ 9,984%	4Ts:	8186320689587796 / N ~ 17,071%	7Ks:	10976079255281664 / N ~ 22,889%
24s:	7069671356621646 / N ~ 14,743%	4T:	6181629968835123 / N ~ 12,891%	7K:	9051703073723811 / N ~ 18,876%
24:	5071435291859460 / N ~ 10,576%	4Js:	8656903289392854 / N ~ 18,052%	7As:	11861873127734247 / N ~ 24,736%
25s:	7272745583613768 / N ~ 15,166%	4J:	6641987239746345 / N ~ 13,851%	7A:	9938667870577233 / N ~ 20,725%
25:	5286899465011548 / N ~ 11,025%	4Qs:	9245805472837146 / N ~ 19,281%	88:	13975351988886204 / N ~ 29,143%
26s:	6926647545521640 / N ~ 14,444%	4Q:	7222217971920171 / N ~ 15,061%	89s:	10750613427220026 / N ~ 22,419%
26:	4905634645619862 / N ~ 10,230%	4Ks:	9985668542295918 / N ~ 20,823%	89:	9014296164131394 / N ~ 18,798%
27s:	6703661188609200 / N ~ 13,979%	4K:	7956696886666980 / N ~ 16,592%	8Ts:	10878387949684317 / N ~ 22,685%
27:	4651412018560341 / N ~ 9,700%	4As:	11314294128222678 / N ~ 23,594%	8T:	9119082550421994 / N ~ 19,016%
28s:	7009408009199046 / N ~ 14,617%	4A:	9323298580910973 / N ~ 19,442%	8Js:	10904161912778400 / N ~ 22,739%
28:	4956750672612888 / N ~ 10,336%	55:	10597242183790428 / N ~ 22,099%	8J:	9101109419045379 / N ~ 18,979%
29s:	7341254012946282 / N ~ 15,309%	56s:	8867659065853410 / N ~ 18,492%	8Qs:	11065140354011766 / N ~ 23,074%
29:	5284398024590316 / N ~ 11,020%	56:	7021697952715203 / N ~ 14,643%	8Q:	9220309180322229 / N ~ 19,227%
2Ts:	7792213762349025 / N ~ 16,249%	57s:	8707574283310281 / N ~ 18,158%	8Ks:	11403557785524936 / N ~ 23,780%
2T:	5735318816908875 / N ~ 11,960%	57:	6835740110438049 / N ~ 14,255%	8K:	9521552209278051 / N ~ 19,856%
2Js:	8248612303899498 / N ~ 17,201%	58s:	8523071246227338 / N ~ 17,773%	8As:	12368159827875441 / N ~ 25,792%
2J:	6180885397146993 / N ~ 12,889%	58:	6616938006137025 / N ~ 13,798%	8A:	10492387559817228 / N ~ 21,880%
2Qs:	8822578270214475 / N ~ 18,398%	59s:	8380607295110745 / N ~ 17,476%	99:	15470241130143168 / N ~ 32,261%
2Q:	6745515106761978 / N ~ 14,067%	59:	6436644396289635 / N ~ 13,423%	9Ts:	11840839115164869 / N ~ 24,692%
2Ks:	9546261600432441 / N ~ 19,907%	5Ts:	8379810069599109 / N ~ 17,475%	9T:	10167109728939258 / N ~ 21,202%
2K:	7463002421491197 / N ~ 15,563%	5T:	6403197746748471 / N ~ 13,353%	9Js:	11884710201127497 / N ~ 24,784%
2As:	10760597204042340 / N ~ 22,439%	5Js:	8890560841615440 / N ~ 18,540%	9J:	10168318902060957 / N ~ 21,204%
2A:	8706415027481100 / N ~ 18,156%	5J:	6906235947440283 / N ~ 14,402%	9Qs:	12068954347070622 / N ~ 25,168%
33:	9005907387669390 / N ~ 18,780%	5Qs:	9490757145617895 / N ~ 19,791%	9Q:	10311907669889127 / N ~ 21,504%
34s:	7647043611654918 / N ~ 15,947%	5Q:	7498332305623968 / N ~ 15,636%	9Ks:	12431402682332334 / N ~ 25,924%
34:	5699881521424863 / N ~ 11,886%	5Ks:	10243705936560882 / N ~ 21,361%	9K:	10637991783760959 / N ~ 22,184%
35s:	7925156673573738 / N ~ 16,527%	5K:	8246615266629741 / N ~ 17,197%	9As:	12904452248939622 / N ~ 26,910%
35:	5996305485518736 / N ~ 12,504%	5As:	11598726320982882 / N ~ 24,187%	9A:	11079332585677539 / N ~ 23,104%
36s:	7589073154459284 / N ~ 15,826%	5A:	9641222453534010 / N ~ 20,105%	TT:	17245137361480950 / N ~ 35,962%
36:	5626095582592431 / N ~ 11,732%	66:	11584827554643402 / N ~ 24,158%	TJs:	13143626963451744 / N ~ 27,409%
37s:	7340460402517668 / N ~ 15,307%	67s:	9375990878315634 / N ~ 19,552%	TJ:	11538918407829558 / N ~ 24,062%
37:	5344535312914356 / N ~ 11,145%	67:	7562766132649503 / N ~ 15,771%	TQs:	13347721377553905 / N ~ 27,834%
38s:	7161640233628977 / N ~ 14,934%	68s:	9269255994019029 / N ~ 19,329%	TQ:	11703589826559876 / N ~ 24,406%
38:	5131610715514680 / N ~ 10,701%	68:	7427714352668226 / N ~ 15,489%	TKs:	13735993916831004 / N ~ 28,644%
39s:	7526945961930018 / N ~ 15,696%	69s:	9150176019699111 / N ~ 19,081%	TK:	12056812857251520 / N ~ 25,142%
39:	5494779657612672 / N ~ 11,458%	69:	7272468650585949 / N ~ 15,165%	TAs:	14234050919630520 / N ~ 29,683%
3Ts:	7984970266241982 / N ~ 16,651%	6Ts:	9139602266382576 / N ~ 19,059%	TA:	12523966639159866 / N ~ 26,117%
3T:	5953068770753697 / N ~ 12,414%	6T:	7228273490700633 / N ~ 15,073%	JJ:	19147859166777186 / N ~ 39,930%
3Js:	8448427761063396 / N ~ 17,618%	6Js:	9153536739462909 / N ~ 19,088%	JQs:	13947486117865740 / N ~ 29,085%
3J:	6405990661086687 / N ~ 13,359%	6J:	7198554526761744 / N ~ 15,011%	JQ:	12360798641468250 / N ~ 25,776%
3Qs:	9029760700077387 / N ~ 18,830%	6Qs:	9803083453511031 / N ~ 20,443%	JKs:	14362805583300993 / N ~ 29,951%
3Q:	6978314523907581 / N ~ 14,552%	6Q:	7843022026224723 / N ~ 16,355%	JK:	12742775908065423 / N ~ 26,573%
3Ks:	9761444582480322 / N ~ 20,356%	6Ks:	10574601532698108 / N ~ 22,052%	JAs:	14892739538938596 / N ~ 31,056%
3K:	7704205588431513 / N ~ 16,066%	6K:	8610783435524664 / N ~ 17,956%	JA:	13243602066350991 / N ~ 27,617%
3As:	11055273966180612 / N ~ 23,054%	6As:	11380085866083510 / N ~ 23,731%	QQ:	21309465880663422 / N ~ 44,437%
3A:	9033482369912655 / N ~ 18,838%	6A:	9411878648351430 / N ~ 19,627%	QKs:	15106556968775679 / N ~ 31,502%
44:	9732406882100058 / N ~ 20,295%	77:	12682207402437606 / N ~ 26,447%	QK:	13554735426139914 / N ~ 28,266%
45s:	8515858110179796 / N ~ 17,758%	78s:	9996746638322898 / N ~ 20,847%	QAs:	15659014886738073 / N ~ 32,654%
45:	6640880676329568 / N ~ 13,848%	78:	8219680556030013 / N ~ 17,141%	QA:	14079392232293313 / N ~ 29,360%
46s:	8254219043747532 / N ~ 17,213%	79s:	9957506122638630 / N ~ 20,765%	KK:	23756721519275616 / N ~ 49,541%
46:	6350967422305335 / N ~ 13,244%	79:	8150412780646137 / N ~ 16,996%	KAs:	16549471943039466 / N ~ 34,511%
47s:	8018871352892118 / N ~ 16,722%	7Ts:	9978699753300495 / N ~ 20,809%	KA:	15048591991289376 / N ~ 31,381%
47:	6083880618641145 / N ~ 12,687%	7T:	8140237622832738 / N ~ 16,975%	AA:	26683139661359832 / N ~ 55,643%
48s:	7816783786044777 / N ~ 16,301%	7Js:	9989282540718051 / N ~ 20,831%		
48:	5846083235030733 / N ~ 12,191%	7J:	8106435096516684 / N ~ 16,905%		

Gegner: 4 Unentschieden gegen: 1 N: 47954076181011000

22:	82676678744952 / N ~	0,172%	49s:	1038406155760323 / N ~	2,165%	7Qs:	11732967170507 34 / N ~	2,447%
23s:	660029176069794 / N ~	1,376%	49:	1092580085835756 / N ~	2,278%	7Q:	1235236916871366 / N ~	2,576%
23:	684687684830130 / N ~	1,428%	4Ts:	1149754060114254 / N ~	2,398%	7Ks:	1278916031180914 / N ~	2,667%
24s:	739673103996054 / N ~	1,542%	4T:	1212490569629865 / N ~	2,528%	7K:	1345708828152102 / N ~	2,806%
24:	770005016986635 / N ~	1,606%	4Js:	1172075089953735 / N ~	2,444%	7As:	1438726827057930 / N ~	3,000%
25s:	818062098257925 / N ~	1,706%	4J:	1234099464233061 / N ~	2,574%	7A:	1513643521951065 / N ~	3,156%
25:	854092724465295 / N ~	1,781%	4Qs:	1230712170838083 / N ~	2,566%	88:	250867876683060 / N ~	0,523%
26s:	797962616217531 / N ~	1,664%	4Q:	1294086778489284 / N ~	2,699%	89s:	1040116705303599 / N ~	2,169%
26:	833750590691583 / N ~	1,739%	4Ks:	1336003655727933 / N ~	2,786%	89:	1083541059113145 / N ~	2,260%
27s:	839214753323760 / N ~	1,750%	4K:	1403209176141201 / N ~	2,926%	8Ts:	1099678019349087 / N ~	2,293%
27:	879925831557543 / N ~	1,835%	4As:	1536019582436595 / N ~	3,203%	8T:	1151494537636935 / N ~	2,401%
28s:	894566529961254 / N ~	1,865%	4A:	1610887182691110 / N ~	3,359%	8Js:	1086186606131709 / N ~	2,265%
28:	938764468677252 / N ~	1,958%	55:	236040208101108 / N ~	0,492%	8J:	1138944991274604 / N ~	2,375%
29s:	929574907967808 / N ~	1,938%	56s:	1010709252459891 / N ~	2,108%	8Qs:	1105574754807441 / N ~	2,305%
29:	975413138339454 / N ~	2,034%	56:	1052916918656838 / N ~	2,196%	8Q:	1161159416857497 / N ~	2,421%
2Ts:	1017879272344386 / N ~	2,123%	57s:	1032736561780581 / N ~	2,154%	8Ks:	1176312011275548 / N ~	2,453%
2T:	1070098582802040 / N ~	2,232%	57:	1078981314344772 / N ~	2,250%	8K:	1237395033555201 / N ~	2,580%
2Js:	1044800899834266 / N ~	2,179%	58s:	1053596555980515 / N ~	2,197%	8As:	1345548053515644 / N ~	2,806%
2J:	1096443059284812 / N ~	2,286%	58:	1104023912403270 / N ~	2,302%	8A:	1416097931042070 / N ~	2,953%
2Qs:	1108236173066109 / N ~	2,311%	59s:	1082670950565117 / N ~	2,258%	99:	257921207248812 / N ~	0,538%
2Q:	1161335418217767 / N ~	2,422%	59:	1137854911285527 / N ~	2,373%	9Ts:	1068333004708074 / N ~	2,228%
2Ks:	1218934726020972 / N ~	2,542%	5Ts:	1174651613759556 / N ~	2,450%	9T:	1115706106445865 / N ~	2,327%
2K:	1275940002161574 / N ~	2,661%	5T:	1239750175925130 / N ~	2,585%	9Js:	1046371213036287 / N ~	2,182%
2As:	1423017329839902 / N ~	2,967%	5Js:	1221215974674759 / N ~	2,547%	9J:	1094260740306372 / N ~	2,282%
2A:	1487717337434541 / N ~	3,102%	5J:	1287810736917237 / N ~	2,686%	9Qs:	1048775951532942 / N ~	2,187%
33:	132920972353140 / N ~	0,277%	5Qs:	1275562873882539 / N ~	2,660%	9Q:	1098626791436238 / N ~	2,291%
34s:	815096042988885 / N ~	1,700%	5Q:	1343342897614206 / N ~	2,801%	9Ks:	1088212517972226 / N ~	2,269%
34:	847797820916478 / N ~	1,768%	5Ks:	1375610015936376 / N ~	2,869%	9K:	1142031098817906 / N ~	2,382%
35s:	894490718848821 / N ~	1,865%	5K:	1447023226232958 / N ~	3,018%	9As:	1218775741069608 / N ~	2,542%
35:	932852731645092 / N ~	1,945%	5As:	1570280384185308 / N ~	3,275%	9A:	1282598636679663 / N ~	2,675%
36s:	869774627359836 / N ~	1,814%	5A:	1649162092539567 / N ~	3,439%	TT:	305364227721460 / N ~	0,637%
36:	907680697271874 / N ~	1,893%	66:	240234410383848 / N ~	0,501%	TJs:	1042127901099999 / N ~	2,173%
37s:	897597467525430 / N ~	1,872%	67s:	1039971968009964 / N ~	2,169%	TJ:	1086834804032595 / N ~	2,266%
37:	939875702716728 / N ~	1,960%	67:	1083176927186691 / N ~	2,259%	TQs:	1034536809807342 / N ~	2,157%
38s:	938006894303379 / N ~	1,956%	68s:	1057431927082914 / N ~	2,205%	TQ:	1080665584875207 / N ~	2,254%
38:	985287904799796 / N ~	2,055%	68:	1104589695707397 / N ~	2,303%	TKs:	1054831230667350 / N ~	2,200%
39s:	997558691658453 / N ~	2,080%	69s:	1077387940310184 / N ~	2,247%	TK:	1103927828915259 / N ~	2,302%
39:	1048698094148700 / N ~	2,187%	69:	1128889766256054 / N ~	2,354%	TAs:	1145646778294593 / N ~	2,389%
3Ts:	1083603401914923 / N ~	2,260%	6Ts:	1152563515499205 / N ~	2,403%	TA:	1202775672689838 / N ~	2,508%
3T:	1141045306016919 / N ~	2,379%	6T:	1213258978327671 / N ~	2,530%	JJ:	266207457675492 / N ~	0,555%
3Js:	1108109665501308 / N ~	2,311%	6Js:	1174451066204922 / N ~	2,449%	JQs:	937952492147820 / N ~	1,956%
3J:	1164900646889094 / N ~	2,429%	6J:	1237746953826900 / N ~	2,581%	JQ:	977972708342829 / N ~	2,039%
3Qs:	1169067620234466 / N ~	2,438%	6Qs:	1249188171952581 / N ~	2,605%	JKs:	945145843688655 / N ~	1,971%
3Q:	1227257593920579 / N ~	2,559%	6Q:	1315657440791604 / N ~	2,744%	JK:	987475016818188 / N ~	2,059%
3Ks:	1276938576947763 / N ~	2,663%	6Ks:	1339079984663688 / N ~	2,792%	JAs:	1021390522657128 / N ~	2,130%
3K:	1338990042606240 / N ~	2,792%	6K:	1408685495248146 / N ~	2,938%	JA:	1071033046353291 / N ~	2,233%
3As:	1478955421793133 / N ~	3,084%	6As:	1487090569013937 / N ~	3,101%	QQ:	225477394114362 / N ~	0,470%
3A:	1548634450641609 / N ~	3,229%	6A:	1563147430067448 / N ~	3,260%	QKs:	827783750896020 / N ~	1,726%
44:	184238760674028 / N ~	0,384%	77:	245075308639404 / N ~	0,511%	QK:	863139929816847 / N ~	1,800%
45s:	970018095072114 / N ~	2,023%	78s:	1046978840019033 / N ~	2,183%	QAs:	892894643280459 / N ~	1,862%
45:	1010771013356379 / N ~	2,108%	78:	1090444557218847 / N ~	2,274%	QA:	935166224375547 / N ~	1,950%
46s:	944476773328854 / N ~	1,970%	79s:	1062694955511063 / N ~	2,216%	KK:	1823805657644888 / N ~	0,380%
46:	984662620023615 / N ~	2,053%	79:	1110233337149481 / N ~	2,315%	KAs:	762841758852216 / N ~	1,591%
47s:	968020922712852 / N ~	2,019%	7Ts:	1127047731670584 / N ~	2,350%	KA:	798081413911137 / N ~	1,664%
47:	1012391590638027 / N ~	2,111%	7T:	1183280982209325 / N ~	2,468%	AA:	1713554883159704 / N ~	0,357%
48s:	995282472248325 / N ~	2,075%	7Js:	1128158661939930 / N ~	2,353%			
48:	1044120472453701 / N ~	2,177%	7J:	1186050565647417 / N ~	2,473%			

Gegner: 4 Unentschieden gegen: 2 N: 47954076181011000

22:	5397946013232 / N ~	0,011%	49s:	98368100357526 / N ~	0,205%	7Qs:	117801418589568 / N ~	0,246%
23s:	53198516742228 / N ~	0,111%	49:	105563635116132 / N ~	0,220%	7Q:	126304505028084 / N ~	0,263%
23:	55804501268976 / N ~	0,116%	4Ts:	114476208837336 / N ~	0,239%	7Ks:	129192954864318 / N ~	0,269%
24s:	62508766783392 / N ~	0,130%	4T:	123105579022764 / N ~	0,257%	7K:	138347141759412 / N ~	0,288%
24:	65904294419016 / N ~	0,137%	4Js:	114868180671714 / N ~	0,240%	7As:	146502326015010 / N ~	0,306%
25s:	71883381985452 / N ~	0,150%	4J:	123303823656378 / N ~	0,257%	7A:	156761125731522 / N ~	0,327%
25:	76093621711638 / N ~	0,159%	4Qs:	119136490495056 / N ~	0,248%	88:	15741034421040 / N ~	0,033%
26s:	68982886493028 / N ~	0,144%	4Q:	127626704285490 / N ~	0,266%	89s:	90046561332780 / N ~	0,188%
26:	73303727987808 / N ~	0,153%	4Ks:	127671277937238 / N ~	0,266%	89:	94560332250420 / N ~	0,197%
27s:	75337270828182 / N ~	0,157%	4K:	136463653513482 / N ~	0,285%	8Ts:	102292972440156 / N ~	0,213%
27:	80609089965906 / N ~	0,168%	4As:	145277648692128 / N ~	0,303%	8T:	108424253980740 / N ~	0,226%
28s:	82406723228910 / N ~	0,172%	4A:	154616632635390 / N ~	0,322%	8Js:	103349660276268 / N ~	0,216%
28:	88265808151086 / N ~	0,184%	55:	15631054928784 / N ~	0,033%	8J:	109943902746276 / N ~	0,229%
29s:	85684952157966 / N ~	0,179%	56s:	86787015316254 / N ~	0,181%	8Qs:	108214944674076 / N ~	0,226%
29:	91756209933822 / N ~	0,191%	56:	91141452018540 / N ~	0,190%	8Q:	115518793952136 / N ~	0,241%
2Ts:	97107433391628 / N ~	0,203%	57s:	91030099667418 / N ~	0,190%	8Ks:	118406719270854 / N ~	0,247%
2T:	104149485857034 / N ~	0,217%	57:	96206616548484 / N ~	0,201%	8K:	126729913028292 / N ~	0,264%
2Js:	97925005302714 / N ~	0,204%	58s:	95833074422556 / N ~	0,200%	8As:	139037578002990 / N ~	0,290%
2J:	104785508365476 / N ~	0,219%	58:	101907364370634 / N ~	0,213%	8A:	148777993631502 / N ~	0,310%
2Qs:	102710984121882 / N ~	0,214%	59s:	102129102911322 / N ~	0,213%	99:	15885210549240 / N ~	0,033%
2Q:	109637630127654 / N ~	0,229%	59:	109221665242344 / N ~	0,228%	9Ts:	95857020264582 / N ~	0,200%
2Ks:	111931686791226 / N ~	0,233%	5Ts:	117805298560974 / N ~	0,246%	9T:	100996253494320 / N ~	0,211%
2K:	119172656722626 / N ~	0,249%	5T:	126739366339026 / N ~	0,264%	9Js:	95917224691089 / N ~	0,200%
2As:	130575647937186 / N ~	0,272%	5Js:	122996067213096 / N ~	0,256%	9J:	101447430579393 / N ~	0,212%
2A:	138409085656104 / N ~	0,289%	5J:	132201344571744 / N ~	0,276%	9Qs:	98874451827540 / N ~	0,206%
33:	8789118485040 / N ~	0,018%	5Qs:	126944874046188 / N ~	0,265%	9Q:	104989213842348 / N ~	0,219%
34s:	68802001795134 / N ~	0,143%	5Q:	136192221332232 / N ~	0,284%	9Ks:	105701408586738 / N ~	0,220%
34:	72241440477462 / N ~	0,151%	5Ks:	135058441626144 / N ~	0,282%	9K:	112633595645898 / N ~	0,235%
35s:	78064970053111 / N ~	0,163%	5K:	144592454484762 / N ~	0,302%	9As:	125024882407578 / N ~	0,261%
35:	82291647223533 / N ~	0,172%	5As:	152102164133394 / N ~	0,317%	9A:	133747706073978 / N ~	0,279%
36s:	74674136172690 / N ~	0,156%	5A:	162162567967530 / N ~	0,338%	TT:	18779874962328 / N ~	0,039%
36:	78981735763728 / N ~	0,165%	66:	15637087006848 / N ~	0,033%	TJs:	91909089465093 / N ~	0,192%
37s:	79596847913994 / N ~	0,166%	67s:	88758358326324 / N ~	0,185%	TJ:	96471334803447 / N ~	0,201%
37:	84786060811632 / N ~	0,177%	67:	93179571545250 / N ~	0,194%	TQs:	93491744712048 / N ~	0,195%
38s:	86364896551326 / N ~	0,180%	68s:	93218623178274 / N ~	0,194%	TQ:	98538691290150 / N ~	0,205%
38:	92551197734292 / N ~	0,193%	68:	98497507997070 / N ~	0,205%	TKs:	97927216519680 / N ~	0,204%
39s:	94516914177810 / N ~	0,197%	69s:	98831160972918 / N ~	0,206%	TK:	103635139261860 / N ~	0,216%
39:	101383957172622 / N ~	0,211%	69:	105088269883758 / N ~	0,219%	TAs:	112753659190608 / N ~	0,235%
3Ts:	105755578529094 / N ~	0,221%	6Ts:	112793844295980 / N ~	0,235%	TA:	119983561741122 / N ~	0,250%
3T:	113586997838526 / N ~	0,237%	6T:	120804933158214 / N ~	0,252%	JJ:	15479535489984 / N ~	0,032%
3Js:	106351861446162 / N ~	0,222%	6Js:	117310305149406 / N ~	0,245%	JQs:	79802041209966 / N ~	0,166%
3J:	113995143361566 / N ~	0,238%	6J:	125986446042102 / N ~	0,263%	JQ:	83788705123032 / N ~	0,175%
3Qs:	110867568889680 / N ~	0,231%	6Qs:	125742399382818 / N ~	0,262%	JKs:	82498964297400 / N ~	0,172%
3Q:	118570583947218 / N ~	0,247%	6Q:	134902124887818 / N ~	0,281%	JK:	87030560358846 / N ~	0,181%
3Ks:	119726348396472 / N ~	0,250%	6Ks:	133125725829132 / N ~	0,278%	JAs:	95300546435838 / N ~	0,199%
3K:	127736675433156 / N ~	0,266%	6K:	142530747465816 / N ~	0,297%	JA:	101219395353498 / N ~	0,211%
3As:	137777094303966 / N ~	0,287%	6As:	146573044079616 / N ~	0,306%	QQ:	11956948086528 / N ~	0,025%
3A:	146343618182886 / N ~	0,305%	6A:	156620806169196 / N ~	0,327%	QKs:	65560037305716 / N ~	0,137%
44:	12209814173736 / N ~	0,025%	77:	15664725628560 / N ~	0,033%	QK:	68871163692846 / N ~	0,144%
45s:	84391203438297 / N ~	0,176%	78s:	89708338543770 / N ~	0,187%	QAs:	77266083548268 / N ~	0,161%
45:	88664379457173 / N ~	0,185%	78:	94175550272820 / N ~	0,196%	QA:	81920168414850 / N ~	0,171%
46s:	80768084226930 / N ~	0,168%	79s:	94826399037264 / N ~	0,198%	KK:	8230976836416 / N ~	0,017%
46:	85089292015590 / N ~	0,177%	79:	100219558560216 / N ~	0,209%	KAs:	59710783985226 / N ~	0,125%
47s:	85252801342878 / N ~	0,178%	7Ts:	107848155621564 / N ~	0,225%	KA:	63261081003822 / N ~	0,132%
47:	90430008440418 / N ~	0,189%	7T:	114936314860362 / N ~	0,240%	AA:	7174895679648 / N ~	0,015%
48s:	90564201557622 / N ~	0,189%	7Js:	110298816850158 / N ~	0,230%			
48:	96668266788540 / N ~	0,202%	7J:	117938966038674 / N ~	0,246%			

Gegner: 4 Unentschieden gegen: 3 N: 47954076181011000

22:	0 / N ~	0,000%	49s:	2247239825940 / N ~	0,005%	7Qs:	3169249694256 / N ~	0,007%
23s:	937545937632 / N ~	0,002%	49:	2476729066728 / N ~	0,005%	7Q:	3468633235098 / N ~	0,007%
23:	1007633354280 / N ~	0,002%	4Ts:	2890103519160 / N ~	0,006%	7Ks:	3640450670184 / N ~	0,008%
24s:	1186156790784 / N ~	0,002%	4T:	3180922121754 / N ~	0,007%	7K:	3971046074616 / N ~	0,008%
24:	1281745482000 / N ~	0,003%	4Js:	2993314702140 / N ~	0,006%	7As:	4299254438526 / N ~	0,009%
25s:	1437136936632 / N ~	0,003%	4J:	3286048310070 / N ~	0,007%	7A:	4674220694532 / N ~	0,010%
25:	1558744452900 / N ~	0,003%	4Qs:	3198321656070 / N ~	0,007%	88:	0 / N ~	0,000%
26s:	1307069780538 / N ~	0,003%	4Q:	3499050099216 / N ~	0,007%	89s:	1962227699124 / N ~	0,004%
26:	1429556714874 / N ~	0,003%	4Ks:	3505530443304 / N ~	0,007%	89:	2105447649396 / N ~	0,004%
27s:	1479633442344 / N ~	0,003%	4K:	3819317969922 / N ~	0,008%	8Ts:	2476306799370 / N ~	0,005%
27:	1633158598842 / N ~	0,003%	4As:	4110039748698 / N ~	0,009%	8T:	2682361236024 / N ~	0,006%
28s:	1772822561778 / N ~	0,004%	4A:	4447380702420 / N ~	0,009%	8Js:	2647441765602 / N ~	0,006%
28:	1955627340060 / N ~	0,004%	55:	0 / N ~	0,000%	8J:	2877804723288 / N ~	0,006%
29s:	1945650131562 / N ~	0,004%	56s:	1736951702418 / N ~	0,004%	8Qs:	2924164618392 / N ~	0,006%
29:	2143550737332 / N ~	0,004%	56:	1860635234790 / N ~	0,004%	8Q:	3185483645352 / N ~	0,007%
2Ts:	2392388868714 / N ~	0,005%	57s:	1876120980192 / N ~	0,004%	8Ks:	3332773472562 / N ~	0,007%
2T:	2631167359254 / N ~	0,005%	57:	2028416463984 / N ~	0,004%	8K:	3632646590190 / N ~	0,008%
2Js:	2500217282058 / N ~	0,005%	58s:	2075972246586 / N ~	0,004%	8As:	4159283398704 / N ~	0,009%
2J:	2740982377332 / N ~	0,006%	58:	2262650804064 / N ~	0,005%	8A:	4521371800890 / N ~	0,009%
2Qs:	2713358706834 / N ~	0,006%	59s:	2360054582832 / N ~	0,005%	99:	0 / N ~	0,000%
2Q:	2962252733406 / N ~	0,006%	59:	2587947035286 / N ~	0,005%	9Ts:	2286569184246 / N ~	0,005%
2Ks:	3033986255766 / N ~	0,006%	5Ts:	2941220257308 / N ~	0,006%	9T:	2458925824590 / N ~	0,005%
2K:	3296177381580 / N ~	0,007%	5T:	3237614102058 / N ~	0,007%	9Js:	2429035413228 / N ~	0,005%
2As:	3659606744628 / N ~	0,008%	5Js:	3240065502828 / N ~	0,007%	9J:	2623157697726 / N ~	0,005%
2A:	3946251919770 / N ~	0,008%	5J:	3558727555104 / N ~	0,007%	9Qs:	2665661275452 / N ~	0,006%
33:	0 / N ~	0,000%	5Qs:	3440833755006 / N ~	0,007%	9Q:	2887286410698 / N ~	0,006%
34s:	1332907928856 / N ~	0,003%	5Q:	3767342036316 / N ~	0,008%	9Ks:	3009306920328 / N ~	0,006%
34:	1429373991336 / N ~	0,003%	5Ks:	3741636221826 / N ~	0,008%	9K:	3264375053232 / N ~	0,007%
35s:	1581934663026 / N ~	0,003%	5K:	4081009182018 / N ~	0,009%	9As:	3780849219600 / N ~	0,008%
35:	1703941214514 / N ~	0,004%	5As:	4336513437066 / N ~	0,009%	9A:	4106285259474 / N ~	0,009%
36s:	1444435845708 / N ~	0,003%	5A:	4699166102952 / N ~	0,010%	TT:	0 / N ~	0,000%
36:	1566773608812 / N ~	0,003%	66:	0 / N ~	0,000%	TJs:	2300649766812 / N ~	0,005%
37s:	1592987388768 / N ~	0,003%	67s:	1770275294904 / N ~	0,004%	TJ:	2459365745844 / N ~	0,005%
37:	1744935888534 / N ~	0,004%	67:	1897169102694 / N ~	0,004%	TQs:	2497610340642 / N ~	0,005%
38s:	1823868857856 / N ~	0,004%	68s:	1964629538418 / N ~	0,004%	TQ:	2680490669682 / N ~	0,006%
38:	2012120655924 / N ~	0,004%	68:	2125098218394 / N ~	0,004%	TKs:	2789734483818 / N ~	0,006%
39s:	2194732391436 / N ~	0,005%	69s:	2238871880406 / N ~	0,005%	TK:	3001785648474 / N ~	0,006%
39:	2418568296882 / N ~	0,005%	69:	2439769318926 / N ~	0,005%	TAs:	3477861870126 / N ~	0,007%
3Ts:	2640203885640 / N ~	0,006%	6Ts:	2790930613680 / N ~	0,006%	TA:	3753949313340 / N ~	0,008%
3T:	2904896411214 / N ~	0,006%	6T:	3058451676222 / N ~	0,006%	JJ:	0 / N ~	0,000%
3Js:	2745578156718 / N ~	0,006%	6Js:	3026165260836 / N ~	0,006%	JQs:	2093148953688 / N ~	0,004%
3J:	3012214981500 / N ~	0,006%	6J:	3322993371372 / N ~	0,007%	JQ:	2236708061532 / N ~	0,005%
3Qs:	2954368084428 / N ~	0,006%	6Qs:	3416849894268 / N ~	0,007%	JKs:	2345410326474 / N ~	0,005%
3Q:	3229054435866 / N ~	0,007%	6Q:	3741372180822 / N ~	0,008%	JK:	2514780740364 / N ~	0,005%
3Ks:	3267821297364 / N ~	0,007%	6Ks:	3707616169164 / N ~	0,008%	JAs:	2980237172526 / N ~	0,006%
3K:	3555668666964 / N ~	0,007%	6K:	4044371478450 / N ~	0,008%	JA:	3209101602396 / N ~	0,007%
3As:	3881612402190 / N ~	0,008%	6As:	4184493592206 / N ~	0,009%	QQ:	0 / N ~	0,000%
3A:	4193233602546 / N ~	0,009%	6A:	4546116608628 / N ~	0,009%	QKs:	1885247390130 / N ~	0,004%
44:	0 / N ~	0,000%	77:	0 / N ~	0,000%	QK:	2011184606190 / N ~	0,004%
45s:	1729615098222 / N ~	0,004%	78s:	1846680996996 / N ~	0,004%	QAs:	2505500682306 / N ~	0,005%
45:	1852563106338 / N ~	0,004%	78:	1980466770516 / N ~	0,004%	QA:	2690178843612 / N ~	0,006%
46s:	1589359993488 / N ~	0,003%	79s:	2109217289244 / N ~	0,004%	KK:	0 / N ~	0,000%
46:	1712111846364 / N ~	0,004%	79:	2282009781978 / N ~	0,005%	KAs:	2162202134472 / N ~	0,005%
47s:	1731404013780 / N ~	0,004%	7Ts:	2644681338294 / N ~	0,006%	KA:	2316178053456 / N ~	0,005%
47:	1883306976726 / N ~	0,004%	7T:	2882647059936 / N ~	0,006%	AA:	0 / N ~	0,000%
48s:	1938063218658 / N ~	0,004%	7Js:	2843317062294 / N ~	0,006%			
48:	2124833748942 / N ~	0,004%	7J:	3108003047640 / N ~	0,006%			

Gegner: 4 Unentschieden gegen: 4 N: 47954076181011000

22:	223532994322590 / N ~	0,466%	49s:	193036981912602 / N ~	0,403%	7Qs:	161620363511382 / N ~	0,337%
23s:	215417946883119 / N ~	0,449%	49:	195895109559987 / N ~	0,409%	7Q:	160072641651861 / N ~	0,334%
23:	224656244202189 / N ~	0,468%	4Ts:	185046942336654 / N ~	0,386%	7Ks:	146444924888754 / N ~	0,305%
24s:	212201622484518 / N ~	0,443%	4T:	186573570521733 / N ~	0,389%	7K:	144128443525752 / N ~	0,301%
24:	220687116074808 / N ~	0,460%	4Js:	180271503014697 / N ~	0,376%	7As:	122184977598204 / N ~	0,255%
25s:	209053719558897 / N ~	0,436%	4J:	181835209987290 / N ~	0,379%	7A:	118481801682684 / N ~	0,247%
25:	217058081012568 / N ~	0,453%	4Qs:	171004957642341 / N ~	0,357%	88:	125324852714304 / N ~	0,261%
26s:	201626851489242 / N ~	0,420%	4Q:	172387425420735 / N ~	0,359%	89s:	181578750020097 / N ~	0,379%
26:	208995373677366 / N ~	0,436%	4Ks:	157561907289912 / N ~	0,329%	89:	182013188011845 / N ~	0,380%
27s:	200522580981342 / N ~	0,418%	4K:	158624080371054 / N ~	0,331%	8Ts:	175908975973017 / N ~	0,367%
27:	207561377313132 / N ~	0,433%	4As:	133236980333691 / N ~	0,278%	8T:	175212594306852 / N ~	0,365%
28s:	197603464172145 / N ~	0,412%	4A:	133202549500821 / N ~	0,278%	8Js:	171063376606158 / N ~	0,357%
28:	204122608030959 / N ~	0,426%	55:	166910210211588 / N ~	0,348%	8J:	170108661698103 / N ~	0,355%
29s:	195501842650785 / N ~	0,408%	56s:	195949417678083 / N ~	0,409%	8Qs:	161627028575868 / N ~	0,337%
29:	201859644388035 / N ~	0,421%	56:	198885981914730 / N ~	0,415%	8Q:	160187702918616 / N ~	0,334%
2Ts:	189334288010616 / N ~	0,395%	57s:	194935263467856 / N ~	0,407%	8Ks:	148020238925103 / N ~	0,309%
2T:	194814466837401 / N ~	0,406%	57:	197469178026741 / N ~	0,412%	8K:	145957583976213 / N ~	0,304%
2Js:	184542973778784 / N ~	0,385%	58s:	193561659764538 / N ~	0,404%	8As:	121973170482024 / N ~	0,254%
2J:	190059265839324 / N ~	0,396%	58:	195719995397274 / N ~	0,408%	8A:	118072057946259 / N ~	0,246%
2Qs:	175239051127905 / N ~	0,365%	59s:	191178344461911 / N ~	0,399%	99:	116442454151076 / N ~	0,243%
2Q:	180571848652197 / N ~	0,377%	59:	192865211811966 / N ~	0,402%	9Ts:	174140411901843 / N ~	0,363%
2Ks:	161717240785467 / N ~	0,337%	5Ts:	184735168290606 / N ~	0,385%	9T:	173577940218681 / N ~	0,362%
2K:	166725020411346 / N ~	0,348%	5T:	185234657492730 / N ~	0,386%	9Js:	170631276232089 / N ~	0,356%
2As:	137240448190929 / N ~	0,286%	5Js:	178139203805244 / N ~	0,371%	9J:	169901797011924 / N ~	0,354%
2A:	141142562684724 / N ~	0,294%	5J:	178222011767841 / N ~	0,372%	9Qs:	161458628629335 / N ~	0,337%
33:	203569100724378 / N ~	0,425%	5Qs:	168890074185216 / N ~	0,352%	9Q:	160259944797486 / N ~	0,334%
34s:	210224896452273 / N ~	0,438%	5Q:	168792696052758 / N ~	0,352%	9Ks:	148051733533245 / N ~	0,309%
34:	217012773306915 / N ~	0,453%	5Ks:	155482254641064 / N ~	0,324%	9K:	146241636515526 / N ~	0,305%
35s:	207198127479390 / N ~	0,432%	5K:	155066698764921 / N ~	0,323%	9As:	123580330450401 / N ~	0,258%
35:	213383747847117 / N ~	0,445%	5As:	131223106447074 / N ~	0,274%	9A:	120077622720876 / N ~	0,250%
36s:	199762782442422 / N ~	0,417%	5A:	129714879560124 / N ~	0,270%	TT:	102602900439972 / N ~	0,214%
36:	205312058949630 / N ~	0,428%	66:	145817305192410 / N ~	0,304%	TJs:	163103666667621 / N ~	0,340%
37s:	198658529026116 / N ~	0,414%	67s:	186220109131350 / N ~	0,388%	TJ:	162128313376212 / N ~	0,338%
37:	203878080808524 / N ~	0,425%	67:	187608034627635 / N ~	0,391%	TQs:	158298131614605 / N ~	0,330%
38s:	197283435356697 / N ~	0,411%	68s:	184987143191085 / N ~	0,386%	TQ:	157158227153313 / N ~	0,328%
38:	202127281195257 / N ~	0,422%	68:	185961973672854 / N ~	0,388%	TKs:	145631109369921 / N ~	0,304%
39s:	193354348565418 / N ~	0,403%	69s:	182617461704481 / N ~	0,381%	TK:	143921898954846 / N ~	0,300%
39:	197582670240657 / N ~	0,412%	69:	183121916263179 / N ~	0,382%	TAs:	121699240249284 / N ~	0,254%
3Ts:	187189652344239 / N ~	0,390%	6Ts:	176178988318602 / N ~	0,367%	TA:	118329256793574 / N ~	0,247%
3T:	190540526653473 / N ~	0,397%	6T:	175496356370778 / N ~	0,366%	JJ:	99392271030354 / N ~	0,207%
3Js:	182406315048540 / N ~	0,380%	6Js:	171134435087184 / N ~	0,357%	JQs:	159885751659978 / N ~	0,333%
3J:	185793787349340 / N ~	0,387%	6J:	170179519017219 / N ~	0,355%	JQ:	159218689708266 / N ~	0,332%
3Qs:	173121457698384 / N ~	0,361%	6Qs:	160073387885121 / N ~	0,334%	JKs:	147218729415294 / N ~	0,307%
3Q:	176326585017069 / N ~	0,368%	6Q:	158485043464914 / N ~	0,330%	JK:	145982361509799 / N ~	0,304%
3Ks:	159640315322514 / N ~	0,333%	6Ks:	146697638346672 / N ~	0,306%	JAs:	123286860294657 / N ~	0,257%
3K:	162522861982854 / N ~	0,339%	6K:	144793045475655 / N ~	0,302%	JA:	120389719348527 / N ~	0,251%
3As:	135242671653444 / N ~	0,282%	6As:	124216045036977 / N ~	0,259%	QQ:	97802929052340 / N ~	0,204%
3A:	137024272593024 / N ~	0,286%	6A:	121375998109437 / N ~	0,253%	QKs:	148796113138911 / N ~	0,310%
44:	184650647543946 / N ~	0,385%	77:	135056189445816 / N ~	0,282%	QK:	148032587742996 / N ~	0,309%
45s:	205234354986762 / N ~	0,428%	78s:	184555939872117 / N ~	0,385%	QAs:	124864244018274 / N ~	0,260%
45:	210005998947747 / N ~	0,438%	78:	185413672242612 / N ~	0,387%	QA:	122439945581724 / N ~	0,255%
46s:	197900508395610 / N ~	0,413%	79s:	182522266269426 / N ~	0,381%	KK:	98721773850330 / N ~	0,206%
46:	201935587859109 / N ~	0,421%	79:	182916459359289 / N ~	0,381%	KAs:	126431071484499 / N ~	0,264%
47s:	196796235476535 / N ~	0,410%	7Ts:	176148105293223 / N ~	0,367%	KA:	124479615557529 / N ~	0,260%
47:	200501590182312 / N ~	0,418%	7T:	175360088800209 / N ~	0,366%	AA:	94731332795730 / N ~	0,198%
48s:	195421323150861 / N ~	0,408%	7Js:	171122398811946 / N ~	0,357%			
48:	198750983476953 / N ~	0,414%	7J:	170063250994146 / N ~	0,355%			

Gegner: 5 Unentschieden gegen: 0 N: 63874829473106652OO

22: 9798586277193211 32 / N ~ 15,340%	49s: 859188611390572323 / N ~ 13,451%	7Qs: 11338217707595289 21 / N ~ 17,751%
23s: 7889161187521434 51 / N ~ 12,351%	49: 591681710076507603 / N ~ 9,263%	7Q: 871600082167427100 / N ~ 13,645%
23: 5247954516842253 06 / N ~ 8,216%	4Ts: 913786714359992304 / N ~ 14,306%	7Ks: 12297444066067740 1 / N ~ 19,252%
24s: 8182763375930508 42 / N ~ 12,811%	4T: 645181061407193829 / N ~ 10,101%	7K: 965616969644636409 / N ~ 15,117%
24: 5567417172884569 32 / N ~ 8,716%	4Js: 967756598095680873 / N ~ 15,151%	7As: 13285757027034031 05 / N ~ 20,800%
25s: 8388124124343041 4 / N ~ 13,132%	4J: 696549557875282542 / N ~ 10,905%	7A: 106224964188018618 0 / N ~ 16,630%
25: 5783450882435691 54 / N ~ 9,054%	4Qs: 10357168429327849 20 / N ~ 16,215%	88: 151328528469420917 4 / N ~ 23,691%
26s: 7908031859393015 01 / N ~ 12,381%	4Q: 761901917317278900 / N ~ 11,928%	89s: 12196440868641900 209 / N ~ 19,094%
26: 5254748924022848 76 / N ~ 8,227%	4Ks: 112148075016667729 8 / N ~ 17,557%	89: 985002519793834518 / N ~ 15,421%
27s: 7578393377776508 572 / N ~ 11,864%	4K: 845255027557528602 / N ~ 13,233%	8Ts: 12333013698503575 53 / N ~ 19,308%
27: 4878940473175039 71 / N ~ 7,638%	4As: 127736482941468442 8 / N ~ 19,998%	8T: 994792915772782101 / N ~ 15,574%
28s: 7886267547335449 47 / N ~ 12,346%	4A: 1003840802530501095 / N ~ 15,716%	8Js: 12307247519848648 11 / N ~ 19,268%
28: 5175285151378990 26 / N ~ 8,102%	55: 116274355517576995 2 / N ~ 18,203%	8J: 985343732702947383 / N ~ 15,426%
29s: 8249392631405192 31 / N ~ 12,915%	56s: 1017534230338090 518 / N ~ 15,930%	8Qs: 1248847743516390778 / N ~ 19,489%
29: 5522354592107363 82 / N ~ 8,646%	56: 772349834349454089 / N ~ 12,092%	8Q: 992630346157565130 / N ~ 15,540%
2Ts: 876605466366226206 / N ~ 13,724%	57s: 993064934987504640 / N ~ 15,547%	8Ks: 1281004896132826182 / N ~ 20,055%
2T: 602679654450412929 / N ~ 9,435%	57: 744011906711468907 / N ~ 11,648%	8K: 1022316343435564 29 / N ~ 16,005%
2Js: 9289131818854772 88 / N ~ 14,543%	58s: 963547250367832389 / N ~ 15,085%	8As: 1387841604622095762 / N ~ 21,728%
2J: 6523262010963851 85 / N ~ 10,213%	58: 709263774676867344 / N ~ 11,104%	8A: 1127410541085103467 / N ~ 17,650%
2Qs: 9950187875213168 46 / N ~ 15,578%	59s: 939291633613288755 / N ~ 14,705%	99: 167971332093198111 0 / N ~ 26,297%
2Q: 7157581813566231 39 / N ~ 11,206%	59: 679160621822792985 / N ~ 10,633%	9Ts: 1350858621984578397 / N ~ 21,149%
2Ks: 10787822000111873908 / N ~ 16,889%	5Ts: 934374029191877250 / N ~ 14,628%	9T: 1123419840827006964 / N ~ 17,588%
2K: 7970355919935254 31 / N ~ 12,478%	5T: 668968740307726956 / N ~ 10,473%	9Js: 1350942845773794822 / N ~ 21,150%
2As: 12183013649715780 96 / N ~ 19,073%	5Js: 99118252586910051 9 / N ~ 15,518%	9J: 1116780547252205997 / N ~ 17,484%
2A: 9379840375876687 23 / N ~ 14,685%	5J: 723309264472999083 / N ~ 11,324%	9Qs: 1367811264038918697 / N ~ 21,414%
33: 10253619809629396 38 / N ~ 16,053%	5Qs: 1060515021373451289 / N ~ 16,603%	9Q: 1126925126567907432 / N ~ 17,643%
34s: 8839786226325682 92 / N ~ 13,839%	5Q: 790092011275998972 / N ~ 12,369%	9Ks: 1406594587924277442 / N ~ 22,021%
34: 6280804057488355 77 / N ~ 9,833%	5Ks: 1147890040165259406 / N ~ 17,971%	9K: 1159280720178690747 / N ~ 18,149%
35s: 9157685138450392 41 / N ~ 14,337%	5K: 875127399352456047 / N ~ 13,701%	9As: 1453700206528698447 / N ~ 22,759%
35: 6618241306788671692 / N ~ 10,361%	5As: 1306914309669956256 / N ~ 20,461%	9A: 1199909981015092404 / N ~ 18,785%
36s: 8690592918600589 77 / N ~ 13,606%	5A: 1037027566295735133 / N ~ 16,235%	TT: 1885197526345076778 / N ~ 29,514%
36: 610399982540504535 / N ~ 9,556%	66: 1262775276419700942 / N ~ 19,770%	TJs: 1509755966536544001 / N ~ 23,636%
37s: 8316200045662358 67 / N ~ 13,020%	67s: 1069408182267656316 / N ~ 16,742%	TJ: 1290487439982044508 / N ~ 20,203%
37: 568045372734112980 / N ~ 8,893%	67: 827239177065451122 / N ~ 12,951%	TQs: 1529834965857719298 / N ~ 23,951%
38s: 8039267164328605826 / N ~ 12,586%	68s: 1051807065047381520 / N ~ 16,467%	TQ: 1304026081001138502 / N ~ 20,415%
38: 535208573583404028 / N ~ 8,379%	68: 805319051051322132 / N ~ 12,608%	TKs: 1571900816493685692 / N ~ 24,609%
39s: 8421335364059290 26 / N ~ 13,184%	69s: 1030741131030407334 / N ~ 16,137%	TK: 1339806601783760607 / N ~ 20,976%
39: 571887475069654023 / N ~ 8,953%	69: 778642397690659797 / N ~ 12,190%	TAs: 1621647695124433170 / N ~ 25,388%
3Ts: 8945440992938787 75 / N ~ 14,005%	6Ts: 1023594592462048467 / N ~ 16,025%	TA: 1383100695127260732 / N ~ 21,653%
3T: 623104199499848013 / N ~ 9,755%	6T: 766030355366608737 / N ~ 11,993%	JJ: 2121869399171541840 / N ~ 33,219%
3Js: 9477022660644256 62 / N ~ 14,837%	6Js: 1020750716612159937 / N ~ 15,980%	JQs: 1605486172705324623 / N ~ 25,135%
3J: 673631324594605068 / N ~ 10,546%	6J: 756430070400898797 / N ~ 11,842%	JQ: 1387824447053704350 / N ~ 21,727%
3Qs: 10147244968555734 67 / N ~ 15,886%	6Qs: 1094264866682773047 / N ~ 17,131%	JKs: 1651447860847290540 / N ~ 25,854%
3Q: 738012220370411889 / N ~ 11,554%	6Q: 827601244630122447 / N ~ 12,957%	JK: 1427733493012868286 / N ~ 22,352%
3Ks: 10994725797367889 16 / N ~ 17,213%	6Ks: 1184202942502093362 / N ~ 18,539%	JAs: 1705473564053785569 / N ~ 26,700%
3K: 820311271577755866 / N ~ 12,842%	6K: 915314793921684432 / N ~ 14,330%	JA: 1475530112570307432 / N ~ 23,100%
3As: 1250611626445871832 / N ~ 19,579%	6As: 1275027855991471746 / N ~ 19,961%	QQ: 2400931678624709760 / N ~ 37,588%
3A: 973809639133532346 / N ~ 15,246%	6A: 1003415733890382900 / N ~ 15,709%	QKs: 1748574457779436875 / N ~ 27,375%
44: 10859060668009672 62 / N ~ 17,001%	77: 1374958355703815556 / N ~ 21,526%	QK: 1534807814922394008 / N ~ 24,028%
45s: 9831779701984471 41 / N ~ 15,392%	78s: 1135858148319956121 / N ~ 17,783%	QAs: 1806252699300569676 / N ~ 28,278%
45: 7352854009151407 11 / N ~ 11,511%	78: 89714525835628973 / N ~ 14,045%	QA: 1586468448843015627 / N ~ 24,837%
46s: 9475327943436335 40 / N ~ 14,834%	79s: 1127021613807927258 / N ~ 17,644%	KK: 2728595877845299344 / N ~ 42,718%
46: 6957968616807673 32 / N ~ 10,893%	79: 883632242835594873 / N ~ 13,834%	KAs: 1927618976337117246 / N ~ 30,178%
47s: 9118396225609129 17 / N ~ 14,275%	7Ts: 1124291768159039724 / N ~ 17,601%	KA: 1719763449169715457 / N ~ 26,924%
47: 6553579122620254 86 / N ~ 10,260%	7T: 875757025950302154 / N ~ 13,711%	AA: 3127522935011410062 / N ~ 48,963%
48s: 8800024881167050 23 / N ~ 13,777%	7Js: 1120088177653249035 / N ~ 17,536%	
48: 6180937034791659 48 / N ~ 9,677%	7J: 864628956611929909 / N ~ 13,536%	

Gegner: 5 Unentschieden gegen: 1 N: 63874829473106652OO

22: 107672542284979 44 / N ~ 0,169%	49s: 130143196914745905 / N ~ 2,037%	7Qs: 148826019555554211 / N ~ 2,330%
23s: 779178427100775 54 / N ~ 1,220%	49: 137114974742572323 / N ~ 2,147%	7Q: 156681406271789880 / N ~ 2,453%
23: 808299917167288 53 / N ~ 1,265%	4Ts: 145958713868604087 / N ~ 2,285%	7Ks: 161337449017463166 / N ~ 2,526%
24s: 889477575084190 89 / N ~ 1,393%	4T: 154110301253353407 / N ~ 2,413%	7K: 169587859828987209 / N ~ 2,655%
24: 926552389027687 65 / N ~ 1,451%	4Js: 147468589769591649 / N ~ 2,309%	7As: 182091704673460059 / N ~ 2,851%
25s: 997718083038621 81 / N ~ 1,562%	4J: 155359173856950102 / N ~ 2,432%	7A: 191187375612118008 / N ~ 2,993%
25: 104278605979177431 / N ~ 1,633%	4Qs: 153615102442748793 / N ~ 2,405%	88: 35813818963560042 / N ~ 0,561%
26s: 963085669514209 08 / N ~ 1,508%	4Q: 161478875205432462 / N ~ 2,528%	89s: 133486335090557802 / N ~ 2,090%
26: 100736970808832952 / N ~ 1,577%	4Ks: 166454542934849151 / N ~ 2,606%	89: 139128488250422283 / N ~ 2,178%
27s: 102411714781873980 / N ~ 1,603%	4K: 174613575788016528 / N ~ 2,734%	8Ts: 143308830334958730 / N ~ 2,244%
27: 107531399930034870 / N ~ 1,683%	4As: 193100577940768419 / N ~ 3,023%	8T: 150201238508698137 / N ~ 2,351%
28s: 109295892221169267 / N ~ 1,711%	4A: 202084483775970312 / N ~ 3,164%	8Js: 140169928981489083 / N ~ 2,194%
28: 114816265010065974 / N ~ 1,798%	55: 33944494182471864 / N ~ 0,531%	8J: 147047752781568717 / N ~ 2,302%
29s: 113953114830547836 / N ~ 1,784%	56s: 126247999052964105 / N ~ 1,976%	8Qs: 141109075286627661 / N ~ 2,209%
29: 119669155483726881 / N ~ 1,873%	56: 131624982633906492 / N ~ 2,061%	8Q: 148181500958060775 / N ~ 2,320%
2Ts: 127181913941312604 / N ~ 1,991%	57s: 129338094304625841 / N ~ 2,025%	8Ks: 149340746288587653 / N ~ 2,338%
2T: 133844380640907294 / N ~ 2,095%	57: 135266857929604698 / N ~ 2,118%	8K: 156954496190790327 / N ~ 2,457%
2Js: 129199474063219005 / N ~ 2,023%	58s: 132351899839582464 / N ~ 2,072%	8As: 170953371841856319 / N ~ 2,676%
2J: 135616610731594176 / N ~ 2,123%	58: 138851477861859693 / N ~ 2,174%	8A: 179553410313347286 / N ~ 2,811%
2Qs: 135916899146082054 / N ~ 2,128%	59s: 136424968724917809 / N ~ 2,136%	99: 36723648097579572 / N ~ 0,575%
2Q: 142322369394293403 / N ~ 2,228%	59: 143556191264551917 / N ~ 2,247%	9Ts: 140725761453321606 / N ~ 2,203%
2Ks: 149436983253407697 / N ~ 2,340%	5Ts: 150711839593548750 / N ~ 2,359%	9T: 147089430566285271 / N ~ 2,303%
2K: 156151261958239581 / N ~ 2,445%	5T: 159294347876031645 / N ~ 2,494%	9Js: 136596438815214438 / N ~ 2,139%
2As: 176438284987889394 / N ~ 2,762%	5Js: 154893215374921863 / N ~ 2,425%	9J: 142901853433057677 / N ~ 2,237%
2A: 183979032608916906 / N ~ 2,880%	5J: 163449192365179452 / N ~ 2,559%	9Qs: 135493054653522051 / N ~ 2,121%
33: 18332887518297504 / N ~ 0,287%	5Qs: 160504741965449556 / N ~ 2,513%	9Q: 141897180408255861 / N ~ 2,221%
34s: 99317258002428336 / N ~ 1,555%	5Q: 169013382837085350 / N ~ 2,646%	9Ks: 139513562158991679 / N ~ 2,184%
34: 103364311138368045 / N ~ 1,618%	5Ks: 172677513508705269 / N ~ 2,703%	9K: 146266880801994474 / N ~ 2,290%
35s: 110400844345796511 / N ~ 1,728%	5K: 181456953442166346 / N ~ 2,841%	9As: 155879345263173300 / N ~ 2,440%
35: 115245683720772612 / N ~ 1,804%	5As: 198724452773245218 / N ~ 3,111%	9A: 163725029602752744 / N ~ 2,563%
36s: 106159567547196216 / N ~ 1,662%	5A: 208311528690321978 / N ~ 3,261%	TT: 44961580691195742 / N ~ 0,704%
36: 110889196335846015 / N ~ 1,736%	66: 34462019396415942 / N ~ 0,540%	TJs: 139575323541796137 / N ~ 2,185%
37s: 110003743445591655 / N ~ 1,722%	67s: 130762124717696658 / N ~ 2,047%	TJ: 145631439744247125 / N ~ 2,280%
37: 115331520098183316 / N ~ 1,806%	67: 136291326264335247 / N ~ 2,134%	TQs: 137413977024503448 / N ~ 2,151%
38s: 116129353342692834 / N ~ 1,818%	68s: 133440066159476445 / N ~ 2,089%	TQ: 143520598600438881 / N ~ 2,247%
38: 122158763471698518 / N ~ 1,912%	68: 139512479359450161 / N ~ 2,184%	TKs: 139190914627921206 / N ~ 2,179%
39s: 123500390709206511 / N ~ 1,933%	69s: 136258642169026632 / N ~ 2,133%	TK: 145539812520523632 / N ~ 2,279%
39: 129961388515583607 / N ~ 2,035%	69: 142906241144929620 / N ~ 2,237%	TAs: 150174423151131825 / N ~ 2,351%
3Ts: 136496044579315977 / N ~ 2,137%	6Ts: 147936047419376910 / N ~ 2,316%	TA: 157364794928130240 / N ~ 2,464%
3T: 143895466008944388 / N ~ 2,253%	6T: 155925250391433867 / N ~ 2,441%	JJ: 38936053598347836 / N ~ 0,610%
3Js: 138243140518617009 / N ~ 2,164%	6Js: 149729387717260656 / N ~ 2,344%	JQs: 124967618147736297 / N ~ 1,956%
3J: 145388526299284578 / N ~ 2,276%	6J: 157924663079978355 / N ~ 2,472%	JQ: 130260716142140304 / N ~ 2,039%
3Qs: 144666869517237024 / N ~ 2,265%	6Qs: 157544582890226238 / N ~ 2,466%	JKs: 125274990323149353 / N ~ 1,961%
3Q: 151792548687942333 / N ~ 2,376%	6Q: 165903880516068396 / N ~ 2,597%	JK: 130747473781398900 / N ~ 2,047%
3Ks: 157835751667083099 / N ~ 2,471%	6Ks: 168419550700337652 / N ~ 2,637%	JAs: 134622582911893269 / N ~ 2,108%
3K: 165262875585568443 / N ~ 2,587%	6K: 176991408785797953 / N ~ 2,771%	JA: 140868259591235721 / N ~ 2,205%
3As: 184689654127073703 / N ~ 2,891%	6As: 188033018751991638 / N ~ 2,944%	QQ: 32901880203652176 / N ~ 0,515%
3A: 192936188862918720 / N ~ 3,021%	6A: 197261091593664825 / N ~ 3,088%	QKs: 110509408534370796 / N ~ 1,730%
44: 26097556024158804 / N ~ 0,409%	77: 35072051554637748 / N ~ 0,549%	QK: 115080748047163728 / N ~ 1,802%
45s: 120916113555196971 / N ~ 1,893%	78s: 132935453138115531 / N ~ 2,081%	QAs: 118338769683699156 / N ~ 1,853%
45: 126108753631500885 / N ~ 1,974%	78: 138541468037259759 / N ~ 2,169%	QA: 123630016217569845 / N ~ 1,936%
46s: 116669462025460887 / N ~ 1,827%	79s: 135302855693655852 / N ~ 2,118%	KK: 26540162643338388 / N ~ 0,416%
46: 121734047573165 39 / N ~ 1,906%	79: 141451675504939275 / N ~ 2,215%	KAs: 101529806838228909 / N ~ 1,590%
47s: 119843714581722099 / N ~ 1,876%	7Ts: 145554645216288906 / N ~ 2,279%	KA: 105871058095001946 / N ~ 1,657%
47: 125477250380325144 / N ~ 1,964%	7T: 152981847803973120 / N ~ 2,395%	AA: 24332240151514296 / N ~ 0,381%
48s: 123779895503642577 / N ~ 1,938%	7Js: 144276251789811870 / N ~ 2,259%	
48: 130025547096368673 / N ~ 2,036%	7J: 151775465394076572 / N ~ 2,376%	

Gegner: 5 Unentschieden gegen: 2 N: 6387482947310665200

22:	10508959234078 56 / N ~	0,016%	49s:	171769883784704 82 / N ~	0,269%	7Qs:	19900344754692774 / N ~	0,312%
23s:	8244075136652298 / N ~	0,129%	49:	18486831658567152 / N ~	0,289%	7Q:	21360211544455998 / N ~	0,334%
23:	8664064996071750 / N ~	0,136%	4Ts:	20108661812566992 / N ~	0,315%	7Ks:	21328117704035496 / N ~	0,334%
24s:	10117085693394960 / N ~	0,158%	4T:	21673861965297600 / N ~	0,339%	7K:	22835481621625374 / N ~	0,358%
24:	10693475996828574 / N ~	0,167%	4Js:	19486159046418978 / N ~	0,305%	7As:	24127448568289398 / N ~	0,378%
25s:	12018957627010338 / N ~	0,188%	4J:	20952122232619014 / N ~	0,328%	7A:	25768088060854326 / N ~	0,403%
25:	12759400583776038 / N ~	0,200%	4Qs:	19531193568586560 / N ~	0,306%	88:	3281083638568992 / N ~	0,051%
26s:	11440946510678754 / N ~	0,179%	4Q:	20937491136892230 / N ~	0,328%	89s:	15711719419682874 / N ~	0,246%
26:	12204322502983050 / N ~	0,191%	4Ks:	20479594503054888 / N ~	0,321%	89:	16500711001701954 / N ~	0,258%
27s:	12858260859505800 / N ~	0,201%	4K:	21875188006129902 / N ~	0,342%	8Ts:	18210878349955880 / N ~	0,285%
27:	13817298890746206 / N ~	0,216%	4As:	23270881320342468 / N ~	0,364%	8T:	19322680204026240 / N ~	0,303%
28s:	13961334009447432 / N ~	0,219%	4A:	24697412487436542 / N ~	0,387%	8Js:	17892185454059742 / N ~	0,280%
28:	15004642902431898 / N ~	0,235%	55:	3276185471471376 / N ~	0,051%	8J:	19049922266960100 / N ~	0,298%
29s:	14359654608213600 / N ~	0,225%	56s:	15004458534551058 / N ~	0,235%	8Qs:	18245625379582950 / N ~	0,286%
29:	15420200937272940 / N ~	0,241%	56:	15775570074949380 / N ~	0,247%	8Q:	19489667734548522 / N ~	0,305%
2Ts:	16548884757151326 / N ~	0,259%	57s:	15848341637973012 / N ~	0,248%	8Ks:	19763388399806280 / N ~	0,309%
2T:	17793989503065270 / N ~	0,279%	57:	16779799373958858 / N ~	0,263%	8K:	21156830573248806 / N ~	0,331%
2Js:	15994782359305110 / N ~	0,250%	58s:	16745489787652812 / N ~	0,262%	8As:	23108887307600892 / N ~	0,362%
2J:	17142890398753026 / N ~	0,268%	58:	17846974896022212 / N ~	0,279%	8A:	24694072879239456 / N ~	0,387%
2Qs:	16125524818741476 / N ~	0,252%	59s:	17826954601629474 / N ~	0,279%	99:	3293652842325936 / N ~	0,052%
2Q:	17216269831611912 / N ~	0,270%	59:	19110909165293874 / N ~	0,299%	9Ts:	17224742954627136 / N ~	0,270%
2Ks:	17193623788924398 / N ~	0,269%	5Ts:	21047859657088218 / N ~	0,330%	9T:	18157584396462138 / N ~	0,284%
2K:	18276195093382326 / N ~	0,286%	5T:	22698754942304826 / N ~	0,355%	9Js:	16780388456555073 / N ~	0,263%
2As:	20191601881588356 / N ~	0,316%	5Js:	21189063719381544 / N ~	0,332%	9J:	17751833993333553 / N ~	0,278%
2A:	21316967881315992 / N ~	0,334%	5J:	22812341067098274 / N ~	0,357%	9Qs:	16833903190945560 / N ~	0,264%
33:	1786231504076976 / N ~	0,028%	5Qs:	21185034687740178 / N ~	0,332%	9Q:	17874731946194076 / N ~	0,280%
34s:	11383154641675026 / N ~	0,178%	5Q:	22746973821878016 / N ~	0,356%	9Ks:	17695728643027446 / N ~	0,277%
34:	11970530020305630 / N ~	0,187%	5Ks:	22065386101531128 / N ~	0,345%	9K:	18851400023961612 / N ~	0,295%
35s:	13253915708571564 / N ~	0,207%	5K:	23614535316046800 / N ~	0,370%	9As:	21044977580576178 / N ~	0,329%
35:	13997514299687046 / N ~	0,219%	5As:	24763123610468856 / N ~	0,388%	9A:	22491012788250156 / N ~	0,352%
36s:	12535885702889604 / N ~	0,196%	5A:	26340686372776002 / N ~	0,412%	TT:	4037787322977960 / N ~	0,063%
36:	13293820781926836 / N ~	0,208%	66:	3276259880257728 / N ~	0,051%	TJs:	16695103560812811 / N ~	0,261%
37s:	13562393094330138 / N ~	0,212%	67s:	15420703148361018 / N ~	0,241%	TJ:	17517924019825767 / N ~	0,274%
37:	14497270658178708 / N ~	0,227%	67:	16204244203830954 / N ~	0,254%	TQs:	16567728439821552 / N ~	0,259%
38s:	14986772147018556 / N ~	0,235%	68s:	16242691702315104 / N ~	0,254%	TQ:	17448914358146112 / N ~	0,273%
38:	16118257865516340 / N ~	0,252%	68:	17186253811939260 / N ~	0,269%	TKs:	17040595802716728 / N ~	0,267%
39s:	16156179614325402 / N ~	0,253%	69s:	17167493091994974 / N ~	0,269%	TK:	18014179605807030 / N ~	0,282%
39:	17376655237524024 / N ~	0,272%	69:	18284590328760126 / N ~	0,286%	TAs:	19487326640551110 / N ~	0,305%
3Ts:	18316903878300456 / N ~	0,287%	6Ts:	19966029644952342 / N ~	0,313%	TA:	20702672227587000 / N ~	0,324%
3T:	19720865429313942 / N ~	0,309%	6T:	21429736758065508 / N ~	0,335%	JJ:	3323756615477472 / N ~	0,052%
3Js:	17727689722871160 / N ~	0,278%	6Js:	20346352106464476 / N ~	0,319%	JQs:	14162227543389546 / N ~	0,222%
3J:	19033481878774464 / N ~	0,298%	6J:	21891584696978844 / N ~	0,343%	JQ:	14855511394196592 / N ~	0,233%
3Qs:	17814505090843008 / N ~	0,279%	6Qs:	21066276122516592 / N ~	0,330%	JKs:	14383240607481930 / N ~	0,225%
3Q:	19061724072724050 / N ~	0,298%	6Q:	22619501867083032 / N ~	0,354%	JK:	15154205786709162 / N ~	0,237%
3Ks:	18820462398505668 / N ~	0,295%	6Ks:	21834040803114672 / N ~	0,342%	JAs:	16536348205790166 / N ~	0,259%
3K:	20058134417797926 / N ~	0,314%	6K:	23369303881106400 / N ~	0,366%	JA:	17532298519149708 / N ~	0,274%
3As:	21696874587767160 / N ~	0,340%	6As:	23998972458967920 / N ~	0,376%	QQ:	2582287913162880 / N ~	0,040%
3A:	22967820472174980 / N ~	0,360%	6A:	25598073689270730 / N ~	0,401%	QKs:	11426813189220906 / N ~	0,179%
44:	2531207620341936 / N ~	0,040%	77:	3277049856693336 / N ~	0,051%	QK:	11984544194603574 / N ~	0,188%
45s:	14539803911843742 / N ~	0,228%	78s:	15636275126202114 / N ~	0,245%	QAs:	13364342024347746 / N ~	0,209%
45:	15295524499974108 / N ~	0,239%	78:	16424476429383012 / N ~	0,257%	QA:	14138637042781206 / N ~	0,221%
46s:	13760729676533034 / N ~	0,215%	79s:	16472875025570364 / N ~	0,258%	KK:	1787833841556960 / N ~	0,028%
46:	14521521685461546 / N ~	0,227%	79:	17423897563610208 / N ~	0,273%	KAs:	10026092766975318 / N ~	0,157%
47s:	14665543386992874 / N ~	0,230%	7Ts:	19088507392591590 / N ~	0,299%	KA:	10584975885709266 / N ~	0,166%
47:	15596050891739592 / N ~	0,244%	7T:	20375713700122962 / N ~	0,319%	AA:	1463575036753152 / N ~	0,023%
48s:	15696270350172864 / N ~	0,246%	7Js:	19002901877883522 / N ~	0,298%			
48:	16804587437255742 / N ~	0,263%	7J:	20348688921518928 / N ~	0,319%			

Gegner: 5 Unentschieden gegen: 3 N: 6387482947310665200

22:	0 / N ~	0,000%	49s:	631797793853526 / N ~	0,010%	7Qs:	7846910842653 72 / N ~	0,012%
23s:	2773073318418 36 / N ~	0,004%	49:	6956606776686 48 / N ~	0,011%	7Q:	8597268330839 46 / N ~	0,013%
23:	2973262249676 220 / N ~	0,005%	4Ts:	7895528286522 90 / N ~	0,012%	7Ks:	8721017507672 88 / N ~	0,014%
24s:	3580150618624 32 / N ~	0,006%	4T:	8687512690111 402 / N ~	0,014%	7K:	9517282859825 88 / N ~	0,015%
24:	3860274618998 64 / N ~	0,006%	4Js:	7584334390007 82 / N ~	0,012%	7As:	1030131273990 582 / N ~	0,016%
25s:	4399455256224 12 / N ~	0,007%	4J:	8330869804504 50 / N ~	0,013%	7A:	1119023214455 556 / N ~	0,018%
25:	4762420339681 80 / N ~	0,007%	4Qs:	7608876206371 38 / N ~	0,012%	88:	0 / N ~	0,000%
26s:	3974182143117 84 / N ~	0,006%	4Q:	8331465872545 56 / N ~	0,013%	89s:	5508974425715 10 / N ~	0,009%
26:	4339092765015 72 / N ~	0,007%	4Ks:	8045746984083 48 / N ~	0,013%	89:	5890212860303 790 / N ~	0,009%
27s:	4512845732942 88 / N ~	0,007%	4K:	8767329120585 96 / N ~	0,014%	8Ts:	6877964218633 74 / N ~	0,011%
27:	4971282495170 94 / N ~	0,008%	4As:	9442451398978 98 / N ~	0,015%	8T:	7437420143332 30 / N ~	0,012%
28s:	5062043381864 40 / N ~	0,008%	4A:	10193671070808 84 / N ~	0,016%	8Js:	6869372335464 42 / N ~	0,011%
28:	5574902941429 56 / N ~	0,009%	55:	0 / N ~	0,000%	8J:	7461869062121 10 / N ~	0,012%
29s:	5189496603707 16 / N ~	0,008%	56s:	5362571819620 80 / N ~	0,008%	8Qs:	7215458078034 54 / N ~	0,011%
29:	5712870383998 38 / N ~	0,009%	56:	5731818188207 04 / N ~	0,009%	8Q:	7864136184220 56 / N ~	0,012%
2Ts:	6263906425172 76 / N ~	0,010%	57s:	5701195812002 58 / N ~	0,009%	8Ks:	8098934483070 36 / N ~	0,013%
2T:	6890183647824 90 / N ~	0,011%	57:	6149647737605 52 / N ~	0,010%	8K:	8835183846769 50 / N ~	0,014%
2Js:	5958985777292 34 / N ~	0,009%	58s:	6091953881376 96 / N ~	0,010%	8As:	1011911178984 7978 / N ~	0,016%
2J:	6539885460483 48 / N ~	0,010%	58:	6625865121260 76 / N ~	0,010%	8A:	1099373127728 976 / N ~	0,017%
2Qs:	5998671066912 12 / N ~	0,009%	59s:	6607598741497 08 / N ~	0,010%	99:	0 / N ~	0,000%
2Q:	6555836210530 14 / N ~	0,010%	59:	7236637836901 02 / N ~	0,011%	9Ts:	6477762173971 50 / N ~	0,010%
2Ks:	6467927115506 70 / N ~	0,010%	5Ts:	8210529552912 48 / N ~	0,013%	9T:	6950340951837 66 / N ~	0,011%
2K:	7024584911575 44 / N ~	0,011%	5T:	9035364694595 94 / N ~	0,014%	9Js:	6421769784614 16 / N ~	0,010%
2As:	7938219041518 14 / N ~	0,012%	5Js:	8401548741408 90 / N ~	0,013%	9J:	6923477928303 36 / N ~	0,011%
2A:	8528841204546 06 / N ~	0,013%	5J:	9231332579878 86 / N ~	0,014%	9Qs:	6673329348995 52 / N ~	0,010%
33:	0 / N ~	0,000%	5Qs:	8419060723449 42 / N ~	0,013%	9Q:	7224133089682 08 / N ~	0,011%
34s:	4064479053554 52 / N ~	0,006%	5Q:	9224756665455 24 / N ~	0,014%	9Ks:	7342320417386 76 / N ~	0,011%
34:	4348965214394 28 / N ~	0,007%	5Ks:	8841681424761 60 / N ~	0,014%	9K:	7966658570982 66 / N ~	0,012%
35s:	4871567134946 34 / N ~	0,008%	5K:	9646093193003 40 / N ~	0,015%	9As:	9377359459048 08 / N ~	0,015%
35:	5235989159442 78 / N ~	0,008%	5As:	1021103786784 870 / N ~	0,016%	9A:	1018269544198 032 / N ~	0,016%
36s:	4400049280886 10 / N ~	0,007%	5A:	1104455937191 364 / N ~	0,017%	TT:	0 / N ~	0,000%
36:	4763066037397 74 / N ~	0,007%	66:	0 / N ~	0,000%	TJs:	6472623864457 44 / N ~	0,010%
37s:	4797230834518 56 / N ~	0,008%	67s:	5370358158243 72 / N ~	0,008%	TJ:	6900082058136 60 / N ~	0,011%
37:	5245586725662 90 / N ~	0,008%	67:	5740302595971 24 / N ~	0,009%	TQs:	6642067265140 50 / N ~	0,010%
38s:	5369957794918 98 / N ~	0,008%	68s:	5742040994883 18 / N ~	0,009%	TQ:	7112193675819 30 / N ~	0,011%
38:	5914790999745 48 / N ~	0,009%	68:	6194058066802 98 / N ~	0,010%	TKs:	7174382784737 76 / N ~	0,011%
39s:	6002335296324 00 / N ~	0,009%	69s:	6215413962832 22 / N ~	0,010%	TK:	7707922624252 80 / N ~	0,012%
39:	6608139533515 98 / N ~	0,010%	69:	6759567149990 22 / N ~	0,011%	TAs:	8909246705287 32 / N ~	0,014%
3Ts:	7075563804668 88 / N ~	0,011%	6Ts:	7671921505973 64 / N ~	0,012%	TA:	9603938675004 48 / N ~	0,015%
3T:	7784257324103 10 / N ~	0,012%	6T:	8403295265999 10 / N ~	0,013%	JJ:	0 / N ~	0,000%
3Js:	6767282271847 50 / N ~	0,011%	6Js:	7884381305623 50 / N ~	0,012%	JQs:	5658962379916 86 / N ~	0,009%
3J:	7430548169488 68 / N ~	0,012%	6J:	8662910002933 86 / N ~	0,014%	JQ:	6032720405901 78 / N ~	0,009%
3Qs:	6798886989226 20 / N ~	0,011%	6Qs:	8393332497047 10 / N ~	0,013%	JKs:	6091527024974 88 / N ~	0,010%
3Q:	7438287954551 04 / N ~	0,012%	6Q:	9197412374682 54 / N ~	0,014%	JK:	6520774411396 08 / N ~	0,010%
3Ks:	7250811620767 02 / N ~	0,011%	6Ks:	8794561178158 56 / N ~	0,014%	JAs:	7706434976350 02 / N ~	0,012%
3K:	7889409459349 56 / N ~	0,012%	6K:	9596318777452 44 / N ~	0,015%	JA:	8287544107749 24 / N ~	0,013%
3As:	8677291006649 52 / N ~	0,014%	6As:	9898098683664 24 / N ~	0,015%	QQ:	0 / N ~	0,000%
3A:	9346355376580 98 / N ~	0,015%	6A:	1074203962972 020 / N ~	0,017%	QKs:	4960357945981 20 / N ~	0,008%
44:	0 / N ~	0,000%	77:	0 / N ~	0,000%	QK:	5282016370126 92 / N ~	0,008%
45s:	5361972796579 50 / N ~	0,008%	78s:	5408225105539 32 / N ~	0,008%	QAs:	6524671836442 86 / N ~	0,010%
45:	5731166790258 66 / N ~	0,009%	78:	5781429840220 56 / N ~	0,009%	QA:	6995677531777 56 / N ~	0,011%
46s:	4872168607781 34 / N ~	0,008%	79s:	5857911893143 62 / N ~	0,009%	KK:	0 / N ~	0,000%
46:	5236643248820 86 / N ~	0,008%	79:	6319430687109 78 / N ~	0,010%	KAs:	5517974812243 86 / N ~	0,009%
47s:	5229058217331 42 / N ~	0,008%	7Ts:	7265665344112 74 / N ~	0,011%	KA:	5896770905847 60 / N ~	0,009%
47:	5676049167572 52 / N ~	0,009%	7T:	7910825021699 94 / N ~	0,012%	AA:	0 / N ~	0,000%
48s:	5660218558019 16 / N ~	0,009%	7Js:	7321726175460 84 / N ~	0,011%			
48:	6195497310747 54 / N ~	0,010%	7J:	8004619732348 08 / N ~	0,013%			

Gegner: 5 Unentschieden gegen: 4 N: 6387482947310665200

22:	0 / N ~ 0,000%	49s:	0 / N ~ 0,000%	7Qs:	0 / N ~ 0,000%
23s:	0 / N ~ 0,000%	49:	0 / N ~ 0,000%	7Q:	0 / N ~ 0,000%
23:	0 / N ~ 0,000%	4Ts:	0 / N ~ 0,000%	7Ks:	0 / N ~ 0,000%
24s:	0 / N ~ 0,000%	4T:	0 / N ~ 0,000%	7K:	0 / N ~ 0,000%
24:	0 / N ~ 0,000%	4Js:	0 / N ~ 0,000%	7As:	0 / N ~ 0,000%
25s:	0 / N ~ 0,000%	4J:	0 / N ~ 0,000%	7A:	0 / N ~ 0,000%
25:	0 / N ~ 0,000%	4Qs:	0 / N ~ 0,000%	88:	0 / N ~ 0,000%
26s:	0 / N ~ 0,000%	4Q:	0 / N ~ 0,000%	89s:	0 / N ~ 0,000%
26:	0 / N ~ 0,000%	4Ks:	0 / N ~ 0,000%	89:	0 / N ~ 0,000%
27s:	0 / N ~ 0,000%	4K:	0 / N ~ 0,000%	8Ts:	0 / N ~ 0,000%
27:	0 / N ~ 0,000%	4As:	0 / N ~ 0,000%	8T:	0 / N ~ 0,000%
28s:	0 / N ~ 0,000%	4A:	0 / N ~ 0,000%	8Js:	0 / N ~ 0,000%
28:	0 / N ~ 0,000%	55:	0 / N ~ 0,000%	8J:	0 / N ~ 0,000%
29s:	0 / N ~ 0,000%	56s:	0 / N ~ 0,000%	8Qs:	0 / N ~ 0,000%
29:	0 / N ~ 0,000%	56:	0 / N ~ 0,000%	8Q:	0 / N ~ 0,000%
2Ts:	0 / N ~ 0,000%	57s:	0 / N ~ 0,000%	8Ks:	0 / N ~ 0,000%
2T:	0 / N ~ 0,000%	57:	0 / N ~ 0,000%	8K:	0 / N ~ 0,000%
2Js:	0 / N ~ 0,000%	58s:	0 / N ~ 0,000%	8As:	0 / N ~ 0,000%
2J:	0 / N ~ 0,000%	58:	0 / N ~ 0,000%	8A:	0 / N ~ 0,000%
2Qs:	0 / N ~ 0,000%	59s:	0 / N ~ 0,000%	99:	0 / N ~ 0,000%
2Q:	0 / N ~ 0,000%	59:	0 / N ~ 0,000%	9Ts:	0 / N ~ 0,000%
2Ks:	0 / N ~ 0,000%	5Ts:	0 / N ~ 0,000%	9T:	0 / N ~ 0,000%
2K:	0 / N ~ 0,000%	5T:	0 / N ~ 0,000%	9Js:	0 / N ~ 0,000%
2As:	0 / N ~ 0,000%	5Js:	0 / N ~ 0,000%	9J:	0 / N ~ 0,000%
2A:	0 / N ~ 0,000%	5J:	0 / N ~ 0,000%	9Qs:	0 / N ~ 0,000%
33:	0 / N ~ 0,000%	5Qs:	0 / N ~ 0,000%	9Q:	0 / N ~ 0,000%
34s:	0 / N ~ 0,000%	5Q:	0 / N ~ 0,000%	9Ks:	0 / N ~ 0,000%
34:	0 / N ~ 0,000%	5Ks:	0 / N ~ 0,000%	9K:	0 / N ~ 0,000%
35s:	0 / N ~ 0,000%	5K:	0 / N ~ 0,000%	9As:	0 / N ~ 0,000%
35:	0 / N ~ 0,000%	5As:	0 / N ~ 0,000%	9A:	0 / N ~ 0,000%
36s:	0 / N ~ 0,000%	5A:	0 / N ~ 0,000%	TT:	0 / N ~ 0,000%
36:	0 / N ~ 0,000%	66:	0 / N ~ 0,000%	TJs:	0 / N ~ 0,000%
37s:	0 / N ~ 0,000%	67s:	0 / N ~ 0,000%	TJ:	0 / N ~ 0,000%
37:	0 / N ~ 0,000%	67:	0 / N ~ 0,000%	TQs:	0 / N ~ 0,000%
38s:	0 / N ~ 0,000%	68s:	0 / N ~ 0,000%	TQ:	0 / N ~ 0,000%
38:	0 / N ~ 0,000%	68:	0 / N ~ 0,000%	TKs:	0 / N ~ 0,000%
39s:	0 / N ~ 0,000%	69s:	0 / N ~ 0,000%	TK:	0 / N ~ 0,000%
39:	0 / N ~ 0,000%	69:	0 / N ~ 0,000%	TAs:	0 / N ~ 0,000%
3Ts:	0 / N ~ 0,000%	6Ts:	0 / N ~ 0,000%	TA:	0 / N ~ 0,000%
3T:	0 / N ~ 0,000%	6T:	0 / N ~ 0,000%	JJ:	0 / N ~ 0,000%
3Js:	0 / N ~ 0,000%	6Js:	0 / N ~ 0,000%	JQs:	0 / N ~ 0,000%
3J:	0 / N ~ 0,000%	6J:	0 / N ~ 0,000%	JQ:	0 / N ~ 0,000%
3Qs:	0 / N ~ 0,000%	6Qs:	0 / N ~ 0,000%	JKs:	0 / N ~ 0,000%
3Q:	0 / N ~ 0,000%	6Q:	0 / N ~ 0,000%	JK:	0 / N ~ 0,000%
3Ks:	0 / N ~ 0,000%	6Ks:	0 / N ~ 0,000%	JAs:	0 / N ~ 0,000%
3K:	0 / N ~ 0,000%	6K:	0 / N ~ 0,000%	JA:	0 / N ~ 0,000%
3As:	0 / N ~ 0,000%	6As:	0 / N ~ 0,000%	QQ:	0 / N ~ 0,000%
3A:	0 / N ~ 0,000%	6A:	0 / N ~ 0,000%	QKs:	0 / N ~ 0,000%
44:	0 / N ~ 0,000%	77:	0 / N ~ 0,000%	QK:	0 / N ~ 0,000%
45s:	0 / N ~ 0,000%	78s:	0 / N ~ 0,000%	QAs:	0 / N ~ 0,000%
45:	0 / N ~ 0,000%	78:	0 / N ~ 0,000%	QA:	0 / N ~ 0,000%
46s:	0 / N ~ 0,000%	79s:	0 / N ~ 0,000%	KK:	0 / N ~ 0,000%
46:	0 / N ~ 0,000%	79:	0 / N ~ 0,000%	KAs:	0 / N ~ 0,000%
47s:	0 / N ~ 0,000%	7Ts:	0 / N ~ 0,000%	KA:	0 / N ~ 0,000%
47:	0 / N ~ 0,000%	7T:	0 / N ~ 0,000%	AA:	0 / N ~ 0,000%
48s:	0 / N ~ 0,000%	7Js:	0 / N ~ 0,000%		
48:	0 / N ~ 0,000%	7J:	0 / N ~ 0,000%		

Gegner: 5 Unentschieden gegen: 5 N: 6387482947310665200

22:	222312527237928 42 / N ~ 0,348%	49s:	18724574059593615 / N ~ 0,293%	7Qs:	16434746165051514 / N ~ 0,257%
23s:	208517553105510 93 / N ~ 0,326%	49:	19027865043715266 / N ~ 0,298%	7Q:	16326799657952868 / N ~ 0,256%
23:	217496873174696 88 / N ~ 0,341%	4Ts:	18054248002175628 / N ~ 0,283%	7Ks:	15307817597461179 / N ~ 0,240%
24s:	205280099298615 30 / N ~ 0,321%	4T:	18214645558569975 / N ~ 0,285%	7K:	15148318086196452 / N ~ 0,237%
24:	213517179228352 20 / N ~ 0,334%	4Js:	17918255536406451 / N ~ 0,281%	7As:	13305915795941460 / N ~ 0,208%
25s:	202034220755538 03 / N ~ 0,316%	4J:	18105835310646291 / N ~ 0,283%	7A:	13037589433378845 / N ~ 0,204%
25:	209781325594107 78 / N ~ 0,328%	4Qs:	17416785568351761 / N ~ 0,273%	88:	13186219960765422 / N ~ 0,206%
26s:	194190724083271 26 / N ~ 0,304%	4Q:	17613319468564206 / N ~ 0,276%	89s:	17593656025703859 / N ~ 0,275%
26:	201263220686783 37 / N ~ 0,315%	4Ks:	16473592157509386 / N ~ 0,258%	89:	17646793122351609 / N ~ 0,276%
27s:	193096113718977 93 / N ~ 0,302%	4K:	16664061816671850 / N ~ 0,261%	8Ts:	17115872875696233 / N ~ 0,268%
27:	199844242630831 92 / N ~ 0,313%	4As:	14466935816120214 / N ~ 0,226%	8T:	17042402715976233 / N ~ 0,267%
28s:	190557667318477 53 / N ~ 0,298%	4A:	14578451339386284 / N ~ 0,228%	8Js:	16958058957391122 / N ~ 0,265%
28:	196833790147141 7 / N ~ 0,308%	55:	17063238609249606 / N ~ 0,267%	8J:	16880521572418338 / N ~ 0,264%
29s:	189817792769661 03 / N ~ 0,297%	56s:	18827417782037397 / N ~ 0,295%	8Qs:	16432588793394918 / N ~ 0,257%
29:	196053426707069 43 / N ~ 0,307%	56:	19124042180359881 / N ~ 0,299%	8Q:	16332543274279959 / N ~ 0,256%
2Ts:	185030350163514 45 / N ~ 0,290%	57s:	18726421739110815 / N ~ 0,293%	8Ks:	15469324651928529 / N ~ 0,242%
2T:	190296477530456 76 / N ~ 0,298%	57:	18982276844487024 / N ~ 0,297%	8K:	15331977012719565 / N ~ 0,240%
2Js:	183663326644453 26 / N ~ 0,288%	58s:	18634052803896552 / N ~ 0,292%	8As:	13279939747240752 / N ~ 0,208%
2J:	189200859744571 02 / N ~ 0,296%	58:	18856831423031661 / N ~ 0,295%	8A:	12988058926868982 / N ~ 0,203%
2Qs:	178625788183544 58 / N ~ 0,280%	59s:	18529824602600631 / N ~ 0,290%	99:	12393057398684508 / N ~ 0,194%
2Q:	184251535967664 99 / N ~ 0,288%	59:	18716727439846620 / N ~ 0,293%	9Ts:	17012255708207970 / N ~ 0,266%
2Ks:	169131366161237 88 / N ~ 0,265%	5Ts:	18021062951711712 / N ~ 0,282%	9T:	16956982359077364 / N ~ 0,265%
2K:	174692869170629 49 / N ~ 0,273%	5T:	18079201483974279 / N ~ 0,283%	9Js:	16929716611937337 / N ~ 0,265%
2As:	148914250845369 66 / N ~ 0,233%	5Js:	17693678277239355 / N ~ 0,277%	9J:	16875156629581785 / N ~ 0,264%
2A:	153677586101364 36 / N ~ 0,241%	5J:	17733067315381827 / N ~ 0,278%	9Qs:	16419771666588654 / N ~ 0,257%
33:	204381591304150 26 / N ~ 0,320%	5Qs:	17193319328011275 / N ~ 0,269%	9Q:	16343611126314885 / N ~ 0,256%
34s:	203228155230942 93 / N ~ 0,318%	5Q:	17241727222381842 / N ~ 0,270%	9Ks:	15468934193877429 / N ~ 0,242%
34:	209980694913083 88 / N ~ 0,329%	5Ks:	16253007934564980 / N ~ 0,254%	9K:	15356189099513853 / N ~ 0,240%
35s:	200102432713690 29 / N ~ 0,313%	5K:	16295518192159872 / N ~ 0,255%	9As:	13444352941784814 / N ~ 0,210%
35:	206244841433312 72 / N ~ 0,323%	5As:	14252980848788088 / N ~ 0,223%	9A:	13191391015300764 / N ~ 0,207%
36s:	192250684064977 50 / N ~ 0,301%	5A:	14216917916826108 / N ~ 0,223%	TT:	10797528240330498 / N ~ 0,169%
36:	197718013116663 85 / N ~ 0,310%	66:	15038271726359508 / N ~ 0,235%	TJs:	16215516731258982 / N ~ 0,254%
37s:	191156074200643 71 / N ~ 0,299%	67s:	17829938451662463 / N ~ 0,279%	TJ:	16140819147349383 / N ~ 0,253%
37:	196299035643520 92 / N ~ 0,307%	67:	17966832676045221 / N ~ 0,281%	TQs:	16020815171417010 / N ~ 0,251%
38s:	190232314514768 37 / N ~ 0,298%	68s:	17744517822037800 / N ~ 0,278%	TQ:	15945087087414549 / N ~ 0,250%
38:	195044503928817 09 / N ~ 0,305%	68:	17843024957305278 / N ~ 0,279%	TKs:	15129169092282771 / N ~ 0,237%
39s:	187575006153182 94 / N ~ 0,294%	69s:	17640466419221307 / N ~ 0,276%	TK:	15020185825729980 / N ~ 0,235%
39:	191887183025129 79 / N ~ 0,300%	69:	17703112428119691 / N ~ 0,277%	TAs:	13148511228488016 / N ~ 0,206%
3Ts:	182788414994918 61 / N ~ 0,286%	6Ts:	17131827536933652 / N ~ 0,268%	TA:	12901816581121296 / N ~ 0,202%
3T:	186131135843619 12 / N ~ 0,291%	6T:	17065716623006661 / N ~ 0,267%	JJ:	10537361265337272 / N ~ 0,165%
3Js:	181424898254716 38 / N ~ 0,284%	6Js:	16966280452552452 / N ~ 0,266%	JQs:	16182315850688316 / N ~ 0,253%
3J:	185039230284679 68 / N ~ 0,290%	6J:	16895565213798825 / N ~ 0,265%	JQ:	16154885811194415 / N ~ 0,253%
3Qs:	176398854369336 36 / N ~ 0,276%	6Qs:	16275241666681830 / N ~ 0,255%	JKs:	15290669771554077 / N ~ 0,239%
3Q:	180102068026713 99 / N ~ 0,282%	6Q:	16167654961647768 / N ~ 0,253%	JK:	15229984549509846 / N ~ 0,238%
3Ks:	166936398751576 17 / N ~ 0,261%	6Ks:	15337614510014400 / N ~ 0,240%	JAs:	13310011907759322 / N ~ 0,208%
3K:	170577208756482 21 / N ~ 0,267%	6K:	15224285595604248 / N ~ 0,238%	JA:	13111615304901162 / N ~ 0,205%
3As:	146797343000523 00 / N ~ 0,230%	6As:	13522336858015686 / N ~ 0,212%	QQ:	10368582087699360 / N ~ 0,162%
3A:	149644453829292 90 / N ~ 0,234%	6A:	13345838308250001 / N ~ 0,209%	QKs:	15450622971022539 / N ~ 0,242%
44:	187090848610741 44 / N ~ 0,293%	77:	14064737160717306 / N ~ 0,220%	QK:	15438235793486868 / N ~ 0,242%
45s:	198052099048380 66 / N ~ 0,310%	78s:	17728259486763513 / N ~ 0,278%	QAs:	13469965107227784 / N ~ 0,211%
45:	202879923536007 87 / N ~ 0,318%	78:	17813740930122585 / N ~ 0,279%	QA:	13319866548878184 / N ~ 0,209%
46s:	190306564225329 18 / N ~ 0,298%	79s:	17635237387857972 / N ~ 0,276%	KK:	10434671300052720 / N ~ 0,163%
46:	194353381962328 53 / N ~ 0,304%	79:	17683181295042042 / N ~ 0,277%	KAs:	13628307378586734 / N ~ 0,213%
47s:	189211951581308 76 / N ~ 0,296%	7Ts:	17128171775144322 / N ~ 0,268%	KA:	13526506864745694 / N ~ 0,212%
47:	192934401570157 98 / N ~ 0,302%	7T:	17047478178135423 / N ~ 0,267%	AA:	9977944056780420 / N ~ 0,156%
48s:	188288209579336 41 / N ~ 0,295%	7Js:	16963282581224382 / N ~ 0,266%		
48:	191679888647270 82 / N ~ 0,300%	7J:	16878023716537359 / N ~ 0,264%		

Literaturverzeichnis

M. Aigner. *Graphentheorie*. B. G. Teubner Stuttgart, 1984.

C. Berge. Two theorems in graph theory. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 43(9):842–844, 1957.

C. Berge. Sur le couplage maximum d'un graphe. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 247:258–259, 1958.

G. G. Cash. An algorithm for calculating the independence and vertex-cover polynomials of a graph. *Applied Mathematics and Computation*, 190:1487–1491, 2007.

R. Diestel. *Graphentheorie*. Springer, 2 edition, 2000.

C.D. Godsil and I. Gutman. On the theory of the matching polynomial. *Journal of Graph Theory*, 5:137–144, 1981a.

C.D. Godsil and I. Gutman. Matching and walks in graphs. *Journal of Graph Theory*, 5:285–297, 1981b.

I. Gutman and S. El-Basil. Topological properties of benzenoid systems. xxiv. computing the sextet polynomial. *Z. Naturforsch.*, 39a:276–281, 1984.

I. Gutman and F. Harary. Generalizations of the matching polynomial. *Utilitas Math.*, 24:97–106, 1983.

S. L. Hakimi, J. Mitchem, and E. Schmeichel. Star arboricity of graphs. *Discrete Mathematics*, 149(1-3):93–98, 1996.

P. Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, s1-10(1):26–30, 1935.

C. Hermite. Sur un nouveau développment en série de fonctions. *C. R Acad. Sci. Paris*, 58:93–100; Oeuvres II 293–303, 1864.

D. König. Gráfok és mátrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38:116–119, 1931.

E. N. Laguerre. Sur l'intégrale $\int_x^\infty x^{-1}\mathrm{e}^{-x}dx$. *Bull. Soc. math. France*, 7:72–81, 1879.

V. E. Levit and E. Mandrescu. The independence polynomial of a graph - a survey. *Department of Computer Science, Holon Academic Institute of Technology*, 2005.

Y. Liu and G. Liu. Number of maximum matchings of bipartite graphs with positive surplus. *Discrete Mathematics*, 274:311–318, 2004.

Y. Liu, Y. Lin, and S. Wang. The number of near-perfect matchings of a type of bipartite graph. *J. Math. Study*, 32:151–156, 1999.

L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland, 1986.

H. Minc. *Permanents*. Addison-Wesley, 1978.

N. Pippinger. Enumeration of matchings in the incidence graphs of complete and complete bipartite graphs. *Siam J. Descrete Math.*, 16(1):47–64, 2002.

K. H. Rosen, editor. *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*. CRC Press, 1999.

U. Schöning. Graph isomorphism is in the low hierarchy. *Journal of Computer and System Sciences*, 37(3), 1988.

E. Teufl and S. Wagner. An asymptotic independence theorem for the number of matchings in graphs. *Graphs and Combinatorics*, 25:239–251, 2009.

P. L. Tschebyschow. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. *Mémoires des Savants étrangers présentés à l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 7:539–586, 1854.

W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.

L. von Pisa. *Liber Abaci*. 1202.